МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет
вычислительной математики
и кибернетики

Е.В. Захаров, И.В. Дмитриева, С.И. Орлик

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Методическое пособие

МОСКВА
2005

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Е.В. Захаров, И.В. Дмитриева, С.И. Орлик

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Методическое пособие

Москва
2005

УДК 517.5
ББК 22.311
З-38

Печатается по решению Редакционно-Издательского Совета факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова

Рецензенты:
доцент *И.Н. Иновенков,*
доцент *А.В. Разгулин*

Захаров Е.В., Дмитриева И.В., Орлик С.И.

З-38 **Уравнения математической физики**: Методическое пособие. – М.: Издательский отдел Факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова (лицензия ИД N 05899 от 24.09.2001 г.), 2005. – 160 с.

ISBN 5-89407-236-0

Данное методическое пособие предназначено для студентов, которые слушают лекции и посещают семинарские занятия. Пользоваться им надо после очередного семинара. Каждая тема пособия является формулировкой домашнего задания с указаниями к решениям задач.

Пособие составлено для студентов 3 курса факультета ВМиК МГУ, обучающихся на кафедрах:

- Исследования операций
- Системного анализа
- Математических методов прогнозирования
- Автоматизации систем вычислительных комплексов
- Системного программирования
- Оптимального управления
- Математической статистики
- Математической кибернетики
- Алгоритмических языков

УДК 517.5
ББК 22.311

ISBN 5-89407-236-0

Темы семинарских занятий.

Литература.

1. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической физики. – М., " Наука", 1977.
2. А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. Теория функций комплексной переменной. – М., "Наука", 1974.
3. Б.М.Будак, А.А.Самарский, А.Н.Тихонов. Сборник задач по математической физике. – М., "Наука", 1972.
4. В.С.Владимиров, В.П. Михайлов, А.А. Вашарин, Х.Х. Каримова, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М., "Наука", 1982.
5. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Основы математического анализа. Часть II. – М., " Наука", 1973.

Тема 1.

Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Литература: [1], гл. I , § 1, п. 1, 3.

Всюду в данной теме будем предполагать, что коэффициенты при старших производных рассматриваемых уравнений нигде не обращаются в нуль одновременно.

1. Пусть в линейном относительно старших производных уравнении с непрерывными коэффициентами

$$a_{11}(x,y)\cdot u_{xx}+2\cdot a_{12}(x,y)\cdot u_{xy}+a_{22}(x,y)\cdot u_{yy}+$$
$$+F(x,y,u,u_x,u_y)=0\,,$$

где $u=u(x,y)$, производится невырожденная замена независимых переменных $\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$. Искомая функция теперь имеет вид $u=u_1(\xi(x,y),\eta(x,y))$. Найдите коэффициенты при старших производных $u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta}$ в уравнении, записанном в новых переменных ξ, η.

Указание. Найдите частные производные $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$. Подставьте их в исходное уравнение и приведите подобные члены.

2. Тип линейного относительно старших производных уравнения

$$a_{11}(x,y)\cdot u_{xx}+2\cdot a_{12}(x,y)\cdot u_{xy}+a_{22}(x,y)\cdot u_{yy}+$$
$$+F(x,y,u,u_x,u_y)=0$$

можно найти с помощью отвечающей ему квадратичной формы

$$Q=a_{11}(x,y)\cdot q_1^2+2\cdot a_{12}(x,y)\cdot q_1\cdot q_2+a_{22}(x,y)\cdot q_2^2$$

от независимых переменных q_1, q_2 ; точку (x, y) считаем при этом фиксированной. Для этого симметричную матрицу коэффициентов квадратичной формы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $a_{12} = a_{21}$, приведём невырожденным линейным преобразованием B к диагональному виду. Это значит, что после преобразования переменных $\vec{q} = B\vec{p}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, квадратичная форма примет канонический вид $Q = \alpha_1 \cdot p_1^2 + \alpha_2 \cdot p_2^2$ в новых независимых переменных p_1, p_2. Можно выбрать такое преобразование B, что коэффициенты α_1 и α_2 будут равны по модулю единице или нулю (такой вид квадратичной формы называется нормальным). Закон инерции квадратичных форм утверждает, что число положительных и число отрицательных членов в каноническом виде не зависит от способа приведения. Это и позволяет установить тип указанного дифференциального уравнения.

Уравнение в частных производных второго порядка называется уравнением эллиптического типа в точке (x, y), если коэффициенты α_1 и α_2 в каноническом виде квадратичной формы Q имеют одинаковые знаки. Их можно выбрать одновременно равными либо $+1$, либо -1. Каков в этом случае знак выражения $D = a_{12}^2(x, y) - a_{11}(x, y) \cdot a_{22}(x, y)$?

Указанное уравнение называется уравнением гиперболического типа в точке (x, y), если α_1 и α_2 имеют разные знаки. Их можно выбрать равными $+1$ и -1. Каков в этом случае знак выражения $D = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}$?

Указанное уравнение называется уравнением параболического типа в точке (x, y), если один из коэффициентов α_1, α_2 равен нулю. Тогда другой коэффициент можно выбрать по модулю равным единице. Чему равно в этом случае выражение $D = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}$?

Вернитесь к задаче 1, в которой производилась замена независимых переменных в дифференциальном уравнении. Пусть новые независимые переменные ξ, η выбраны так, что $\xi_x = b_{11}$, $\xi_y = b_{21}$, $\eta_x = b_{12}$, $\eta_y = b_{22}$, где b_{ij} – элементы матрицы B, с помощью которой Q была приведена к каноническому виду. Докажите, что при такой замене переменных коэффициенты при вторых производных функции $u(x, y)$ будут преобразованы так же как коэффициенты квадратичной формы Q.

Замечание. Приведением к каноническому виду отвечающей уравнению квадратичной формы можно классифицировать дифференциальные уравнения в частных производных с произвольным числом независимых переменных.

3. К какому типу уравнений относится уравнение теплопроводности $u_t = a^2 \cdot u_{xx}$?

4. К какому типу уравнений относится уравнение Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$?

5. К какому типу уравнений относится волновое уравнение $u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx}$?

В задачах 6 – 25 найдите области на плоскости x, y, в которых уравнение сохраняет тип. Укажите тип уравнения в каждой такой области.

6. $u_{xx} + y \cdot u_{yy} = 0$

7. $u_{xx} + xy \cdot u_{yy} = 0$

8. $y \cdot u_{xx} + x \cdot u_{yy} = 0$

9. $x \cdot u_{xx} + y \cdot u_{yy} = 0$

10. $y^2 \cdot u_{xx} - x^2 \cdot u_{yy} = 0$

11. $x^2 \cdot u_{xx} - y^2 \cdot u_{yy} = 0$

12. $x^2 \cdot u_{xx} + y^2 \cdot u_{yy} = 0$

13. $y^2 \cdot u_{xx} + x^2 \cdot u_{yy} = 0$

14. $y^2 \cdot u_{xx} + 2xy \cdot u_{xy} + x^2 \cdot u_{yy} = 0$

15. $x^2 \cdot u_{xx} + 2xy \cdot u_{xy} + y^2 \cdot u_{yy} = 0$

16. $x \cdot u_{xx} + 2x \cdot u_{xy} + (x-1) \cdot u_{yy} = 0$

17. $x \cdot u_{xx} + y \cdot u_{yy} + 2 \cdot u_x + 2 \cdot u_y = 0$

18. $u_{xx} + 2 \cdot u_{xy} + 4 \cdot u_{yy} + 2 \cdot u_x + 3 \cdot u_y = 0$

19. $u_{xx} + 2 \cdot u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + u = 0$

20. $x^2 \cdot u_{xx} + 2xy \cdot u_{xy} + y^2 \cdot u_{yy} - 2y \cdot u_x + y \cdot e^{y/x} = 0$

21. $2 \cdot u_{xy} - 4 \cdot u_{yy} + u_x - 2 \cdot u_y + u + x = 0$

22. $u_{xy} + u_{xx} - u_y - 10 \cdot u + 4x = 0$

23. $3 \cdot u_{xx} + u_{xy} + 3 \cdot u_x + u_y - u + y = 0$

24. $u_{xx} - 2 \cdot u_{xy} + u_{yy} + 6u_x - 2u_y + u = 0$

25. $u_{xx} - 2x \cdot u_{xy} + \sin x = 0$

26. Упрощать уравнение можно и при помощи замены искомой функции. Пусть все коэффициенты линейного уравнения

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b \cdot u + c_1 \cdot u_x + c_2 \cdot u_y + f(x,y) = 0$$

постоянны. После приведения к канонической форме выполните замену неизвестной функции: $u(x,y) = e^{\alpha x + \beta y} \cdot v(x,y)$, где α и β – параметры. Как надо выбрать α и β, чтобы в канонической форме уравнения для новой функции v исчезли первые производные (для уравнений гиперболического или эллиптического типа) ? Как надо выбрать α и β, чтобы в канонической форме уравнения исчезла одна из первых производных и сама искомая функция (для уравнений параболического типа)? Найдите среди уравнений 6 – 25 уравнения с постоянными коэффициентами и приведите их к канонической форме без указанных членов.

одна из первых производных и сама искомая функция (для уравнений параболического типа)? Найдите среди уравнений 6 – 25 уравнения с постоянными коэффициентами и приведите их к канонической форме без указанных членов.

Тема 2.

Уравнение теплопроводности. Постановки начально-краевых задач для уравнения теплопроводности и их редукция.

Литература: $[1]$, гл.III, §1, п.1-4; гл.III, §2, п.5; гл.III, §1, п.6.

1. Выведите дифференциальное уравнение теплопроводности с одной пространственной переменной.

Решение. Рассмотрим процесс теплопроводности в стержне, то есть процесс обмена тепловой энергией между соседними частями стержня. Обозначим через $u(x,t)$ температуру стержня в точке x в момент времени t. Мы предполагаем, что температура стержня не зависит от координат y и z. Если изменение температуры происходит только вследствие теплопроводности, то закон сохранения энергии для участка стержня $[x_1, x_2]$ утверждает, что тепловая энергия, затраченная на изменение температуры этого участка в течение промежутка времени $[t_1, t_2]$, равна количеству тепла, полученному участком $[x_1, x_2]$ за то же время через его концы. Это значит, что только потоки тепла через концы $x = x_1$ и $x = x_2$ выделенного участка определяют изменение $u(x,t)$. Поток тепла через поперечное сечение стержня (с координатой x) — это количество тепла, пересекающего данное сечение в направлении оси x в единицу времени. Плотностью потока тепла q (в точке x) называется поток через единицу площади поперечного сечения. Очевидно, что передача тепла происходит от части стержня с высокой температурой к части стержня с меньшей температурой; этот факт выражается законом Фурье, связывающим q и u: $q = -k \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x}$, где

$k > 0$ — коэффициент теплопроводности, который характеризует материал стержня. Теперь баланс тепла для $[x_1, x_2]$ и $[t_1, t_2]$ можно записать в виде

$$\int_{x_1}^{x_2} c \cdot \rho \cdot [u(x,t_2) - u(x,t_1)] dx = \int_{t_1}^{t_2} [q(x_1,\tau) - q(x_2,\tau)] d\tau =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[k \cdot \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} \bigg|_{x=x_2} - k \cdot \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} \bigg|_{x=x_1} \right] d\tau ,$$

где c – удельная теплоемкость, ρ – объёмная плотность массы стержня. Предполагая, что у функции $u(x,t)$ имеются непрерывные производные u_t и u_{xx}, запишем левую и правую части равенства по интегральной теореме о среднем, разделим на $x_2 - x_1$ и на $t_2 - t_1$, а затем стянем отрезок $[x_1, x_2]$ в точку x, а отрезок $[t_1, t_2]$ – в точку t. Тогда получим рассмотренный выше тепловой баланс в виде $u_t = a^2 \cdot u_{xx}$, где $a^2 = \dfrac{k}{c \cdot \rho}$. Это дифференциальное уравнение относительно $u(x,t)$ называется уравнением теплопроводности.

Замечание. Предположение об одномерности процесса передачи тепла в стержне означает, что в каждый момент времени изотермические сечения стержня совпадают с его поперечными сечениями $x = const$. Кроме того, площадь поперечных сечений постоянна.

При выводе дифференциального уравнения неявно предполагалось, что материал стержня однородный $(k = const, c = const, \rho = const)$ и что тепло не теряется через боковую поверхность стержня и не поступает от каких-либо внешних источников.

2. Запишите уравнение теплопроводности с учетом потерь тепла через боковую поверхность стержня. Сведите это уравнение к уравнению, содержащему только производные искомой функции.

Решение. Изменение температуры стержня кроме рассмотренной в задаче 1 теплопроводности может происходить еще и из-за обмена теплом между стержнем и окружающей его средой через боковую поверхность стержня. (Если такого обмена теплом нет, то боковая поверхность стержня называется теплоизолированной — поток тепла через нее равен нулю.) Пусть температура внешней среды не зависит ни от x, ни от t. Предположим, что плотность потока тепла, покидающего стержень через боковую поверхность, пропорциональна разности $u(x,t)-u_{среды}$ — закон Ньютона. Тогда учёт потерь тепла через боковую поверхность стержня вместо рассмотренного выше уравнения $u_t = a^2 \cdot u_{xx}$ приводит к уравнению $u_t = a^2 \cdot u_{xx} - b \cdot \left(u(x,t) - u_{среды}\right)$, где $b = const > 0$.

Если вместо $u(x,t)$ ввести функцию $v(x,t) = u(x,t) - u_{среды}$, то она будет удовлетворять уравнению $v_t = a^2 \cdot v_{xx} - b \cdot v$. Чтобы избавиться от члена, содержащего новую неизвестную функцию $v(x,t)$, выполните ещё одну замену искомой функции: $v(x,t) = e^{\beta t} \cdot w(x,t)$. Подставьте это выражение в уравнение для v и подберите параметр β так, чтобы получить уравнение $w_t = a^2 \cdot w_{xx}$.

3. Температура стержня может изменяться не только из-за наличия теплопроводности в нем, но и от действия источников (или поглотителей) тепла в стержне. Приведите примеры внешних источников или поглотителей тепла, действие которых не зависит от температуры стержня $u(x,t)$. К какому уравнению относительно функции $u(x,t)$ приводит учёт этих источников?

Указание. Для описания действия внешних источников тепла надо указать как они распределены вдоль стержня и как их мощность зависит от времени. Функция $f(x,t)$ называется плотностью распределения источников тепла, если источник выделяет на участке стержня $[x, x+dx]$ за промежуток времени $[t, t+dt]$

количество тепла $f(x,t)dxdt$. Очевидно, тогда на участке $[x_1, x_2]$ за время $[t_1, t_2]$ этот источник выделит тепловую энергию $\int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,t)dxdt$. Учтите в тепловом балансе из задачи 1 действие этих источников и получите требуемое уравнение теплопроводности.

4. Запишите нестационарное уравнение теплопроводности с тремя пространственными переменными для случая неоднородной среды.

Процесс распространения тепла называется стационарным, если он не зависит от времени. Запишите уравнение теплопроводности в пространстве для стационарной температуры в случае однородной среды (уравнение Пуассона). Запишите его, если в теле не действуют источники тепла (уравнение Лапласа). Запишите уравнение теплопроводности для двумерной плоской пластины, т.е. относительно функции $u = u(x, y, t)$. Во что перейдёт уравнение теплопроводности в пространстве, если все входящие в него функции не зависят от y и z? Запишите стационарное одномерное уравнение теплопроводности. Каково его общее решение?

Указание. Если в теле идёт процесс передачи тепла и действуют внешние источники тепла, то его температура $u(x, y, z, t)$ описывается уравнением $c \cdot \rho \cdot u_t = div(k \cdot grad\, u) + F(x, y, z, t)$, в котором $c = c(x, y, z)$, $\rho = \rho(x, y, z)$, $k = k(x, y, z)$ характеризуют неоднородность среды (здесь $grad$ берётся по пространственным переменным x, y, z). Получите из этого уравнения требуемые его частные случаи.

5. Пусть в уравнении теплопроводности $a^2 = 1$: $u_t = u_{xx}$, и пусть функция $U(x,t)$ удовлетворяет этому уравнению. Какие из следующих функций (c — произвольная постоянная) тоже являются его решениями:

$$U_1(x,t)=U(x-c,t),\ U_2(x,t)=U(x,t-c),\ U_3(x,t)=U(cx,c^2t),$$

$$U_4(x,t)=\exp\{-cx+c^2t\}\cdot U(x-2ct,t), \qquad U_5(x,t)=$$
$$=(1+4ct)^{-1/2}\cdot\exp\{-cx^2/(1+4ct)\}\cdot U(x/(1+4ct),t/(1+4ct))?$$

Является ли функция $U(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\{-x^2/(4t)\}$ решением указанного уравнения $(t>0)$?

Найдите аналогичные решения для уравнения $u_t=a^2\cdot u_{xx}, a^2\neq 1$.

Найдите общий вид решения уравнения $u_t=u_{xx}$, которое зависит только от $x-ct$ $(c=const)$: $U(x,t)=V(x-ct)$ (найдите функцию одной переменной V).

Задача нахождения решения уравнения теплопроводности, удовлетворяющего заданным краевым условиям и начальному условию, называется начально-краевой. Если на обоих концах стержня заданы краевые условия 1-го рода (условия Дирихле), то задачу называют 1-ой краевой; если 2-го рода (условия Неймана), то — 2-ой краевой; в случае краевых условий разного рода на концах стержня — смешанной краевой задачей.

6. Для всех комбинаций краевых условий 1-го и 2-го рода на концах стержня запишите постановки начально-краевых задач для уравнения теплопроводности.

Каким требованиям должны удовлетворять заданные в начальном и краевых условиях функции чтобы решения поставленных задач были классическими?

7. Пусть функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению $u_t=a^2\cdot u_{xx}$ при $0<x<l$, $t>0$ и граничным условиям $u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$ при $t>0$.

Достаточно ли этих условий для выделения единственного решения уравнения?

Указание. Рассмотрите однопараметрическое семейство функций

$$\left\{u_n(x,t)=\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\cdot t\right\},\ n=0,1,2,...\right\}.$$

8. Пусть функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению $u_t=a^2\cdot u_{xx}$ при $0<x<l$, $t>0$ и граничным условиям $u_x(0,t)=0$, $u_x(l,t)=0$ при $t>0$.

Достаточно ли этих условий для выделения единственного решения уравнения?

Указание. Рассмотрите семейство функций

$$\left\{u_n(x,t)=\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\cdot t\right\},\ n=0,1,2,...\right\}.$$

9. Пусть функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению $u_t=a^2\cdot u_{xx}$ при $0<x<l$, $t>0$ и условиям $u_x(0,t)=0$ при $t>0$, $u(x,0)=x$ при $0\le x\le l$.

Достаточно ли написанных здесь условий для выделения единственного решения уравнения?

Указание. Рассмотрите два случая изменения температуры стержня:

– если к написанным условиям добавлено условие $u(l,t)=l$;

– если к написанным условиям добавлено условие $u_x(l,t)=0$.

Какой будет температура стержня при $t\to+\infty$ в каждом из этих двух случаев?

10. Боковая поверхность однородного стержня $0\le x\le l$ теплоизолирована. Внешних источников тепла нет. Левый конец стержня поддерживается при температуре $u_1=const$, а правый –

при температуре $u_2 = const$. Начальное распределение температуры равно $u_0 \cdot x$, $u_0 = const$.

Запишите математическую постановку этой задачи.

Замечание. Обратите внимание на то, что требование сопряжения начального и краевых условий в данной задаче не выполняется.

11. Среда, в которой находится однородный стержень $0 \le x \le l$, имеет постоянную температуру $u_{среды}$. На боковой поверхности стержня происходит теплообмен со средой по закону Ньютона. Других внешних источников тепла нет. Левый конец стержня теплоизолирован, а правый поддерживается при постоянной температуре $u_{среды}$. Начальное распределение температуры стержня равно $u_0 = const$.

Запишите математическую постановку этой задачи.

12. Боковая поверхность однородного стержня $0 \le x \le l$ теплоизолирована. Внешних источников тепла нет. Начальная температура стержня нулевая. При $t > 0$ на концы стержня подаются одинаковые тепловые потоки мощностью $Q = const$, причем на левом конце поток тепла направлен внутрь стержня, а на правом – из стержня.

Запишите математическую постановку этой задачи.

13. Источник тепла известной мощности находится на конце стержня и подаёт тепло внутрь стержня. Запишите это краевое условие для левого, для правого конца.

14. Пусть среда, окружающая стержень, имеет известную температуру $\theta(t)$. Какой физический смысл имеет краевое условие 3-го рода (на левом конце): $-k \cdot \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \lambda \cdot (\theta(t) - u(0,t)) \quad (\lambda = const)$? Во что превратится это краевое условие, если λ очень велико? Если λ исчезающе мало? Запишите аналогичное краевое условие на правом конце стержня.

Какой физический смысл имеет краевое условие $-k \cdot \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \lambda \cdot (\theta(t) - u(0,t)) + f(t)$?

15. Однородный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью нагревается источником тепла постоянной мощности, равномерно распределённой по всему стержню. В начальный момент времени температура стержня равна нулю, а концы стержня всегда поддерживаются при нулевой температуре.

Запишите математическую постановку этой задачи.

16. Однородный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью нагревается источником тепла постоянной мощности, равномерно распределённой по всему стержню. В начальный момент времени температура стержня равна нулю, а концы стержня теплоизолированы.

Запишите математическую постановку этой задачи. Может ли температура реального стержня неограниченно возрастать?

17. Сведите поставленные в пункте 6 начально-краевые задачи с неоднородными граничными условиями к задачам с нулевыми граничными условиями.

Пример решения для 1-ой краевой задачи.

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx}\ ,\ 0 < x < l\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u(0,t) = \mu_1(t)\ ,\ u(l,t) = \mu_2(t)\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = \varphi(x)\ ,\ 0 \le x \le l\ .$$

Положим $u(x,t) = v(x,t) + U(x,t)$, где $U(x,t)$ выберем из условий $U(0,t) = \mu_1(t)\,,\ U(l,t) = \mu_2(t)$. Например,

$$U(x,t) = \frac{x}{l} \cdot (\mu_2(t) - \mu_1(t)) + \mu_1(t).$$

Заметим, что этими условиями $U(x,t)$ не определяется однозначно. Запишите задачу для функции v при такой замене.

Указание. В задачах с другими комбинациями краевых условий ищите $U(x,t)$ линейную по x или в виде многочлена второй степени относительно x.

Дополнение к теме 2.

18. Полуограниченный $(x>0)$ стержень в момент времени $t=0$ имел температуру $\varphi(x)$. Конец стержня сгорает с постоянной скоростью ω_0 и известной температурой горения $\psi(t)$. Поставьте задачу о температуре стержня. Приведите другой пример природного явления, описываемого задачей с подвижной границей для уравнения теплопроводности.

19. Выведите дифференциальное уравнение диффузии с одной пространственной переменной.

Решение. Рассмотрим процесс диффузии вещества в жидкости внутри тонкой трубки. Пусть, например, это процесс расплывания марганцовки $KMnO_4$ в трубке с водой. Предположение о том, что трубка тонкая, означает на самом деле одномерность процесса, то есть его зависимость лишь от одной пространственной переменной x. Площадь поперечного сечения трубки S будем считать не зависящей от x. Концентрацией вещества $(KMnO_4)$ называется его масса в единице объема. Обозначим через $u(x,t)$ концентрацию вещества в точке x в момент времени t. Поток вещества через поперечное сечение трубки (с координатой x) — это количество вещества, пересекающего данное сечение трубки в направлении оси x в единицу времени. Плотностью потока q (в точке x) называется поток, отнесенный к единице площади поперечного сечения трубки. Очевидно, что диффузия происходит от части трубки с высокой концентрацией вещества к части трубки с меньшей его концентрацией. Введенные величины q и u связаны законом Нернста: $q=-k\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}$, где $k>0$ — коэффициент диффузии; k характеризует само вещество и среду, в которой происходит диффузия. Запишите баланс диффундирующего вещества для участка трубки $[x_1,x_2]$ в течение промежутка времени $[t_1,t_2]$. Получите отсюда дифференциальное уравнение диффузии.

Тема 3.

Решение начально-краевых задач на отрезке для однородного уравнения теплопроводности методом разделения переменных.

Литература: [1], гл. III, § 2, п. 1.

Метод разделения переменных является одним из основных методов построения решения линейных начально-краевых задач для уравнений в частных производных. Идея метода состоит в том, что нетривиальные частные решения данного уравнения ищутся в виде произведения $X(x)\cdot T(t)$, где X зависит только от x, а T — только от t.Это сводит задачу для уравнения в частных производных к некоторой совокупности задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Методом разделения переменных решите 1-ую краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx}\ , 0 < x < l\ , t > 0\ ;$$
$$u(0,t) = 0\ , u(l,t) = 0\ , t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = \varphi(x), 0 \le x \le l\ .$$

Решение. Сначала найдём частные решения уравнения вида $X(x)\cdot T(t)$, которые удовлетворяют краевым условиям. Если подставить произведение $X(x)\cdot T(t)$ в уравнение и разделить его на $a^2\cdot X(x)\cdot T(t)$, то получим равенство

$$\frac{X''_{xx}(x)}{X(x)} = \frac{T'_t(t)}{a^2 T(t)}\ ,$$

левая часть которого зависит только от x, а правая – только от t.Поскольку x и t являются независимыми переменными, равенство возможно только если обе его части равны постоянной.

Обозначим эту действительную постоянную через $(-\lambda)$ и запишем отдельно два уравнения относительно $X(x)$ и $T(t)$:

$$X''_{xx}(x)+\lambda\cdot X(x)=0\ ;\qquad T'_t(t)+a^2\cdot\lambda\cdot T(t)=0\,.$$

Подставим теперь произведение $X(x)\cdot T(t)$ в краевые условия и вспомним, что они выполнены при всех $t>0$. Отсюда для рассматриваемой начально-краевой задачи получаем $X(0)=0$, $X(l)=0$. Чтобы найти интересующие нас функции $X(x)$, надо решить краевую задачу Штурма-Лиувилля на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения относительно $X(x)$:

$$\begin{cases} X''_{xx}(x)+\lambda\cdot X(x)=0\,,\ 0<x<l\,; \\ X(0)=0\,,\ X(l)=0\,. \end{cases}$$

Решение полученной задачи Штурма-Лиувилля было построено в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений, где было доказано, что имеется бесконечная последовательность собственных значений $\{\lambda_n\}$, все они действительны и каждому из них отвечает одна собственная функция $X_n(x)$ (с точностью до ненулевого постоянного множителя). Для рассматриваемых краевых условий 1-го рода

$$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,\ X_n(x)=\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),\ n=1,2,3,\dots.$$

Если задача Штурма-Лиувилля решена, то уравнение для $T(t)$ надо решать только при тех λ, которые оказались собственными значениями задачи для $X(x)$. При каждом таком λ_n надо найти общее решение уравнения относительно $T(t)$. В силу линейности исходной задачи сумма произведений $X_n(x)\cdot T_n(t)$, отвечающих различным λ_n, будет удовлетворять уравнению в частных производных и нулевым краевым условиям исходной начально-краевой задачи. Чтобы найти окончательное ее решение, надо выбрать коэффициенты этой линейной комбинации, исходя из оставшегося пока неиспользованным начального условия. Иными словами, из всевозможных решений исходного уравнения $u(x,t)=\sum_n X_n(x)\cdot T_n(t)$, которые удовлетворяют краевым условиям , надо отобрать единственное решение, удовлетворяющее начальному условию. Для рассматриваемых краевых условий 1-го рода получаем

$$T_n(t)=A_n\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2\cdot t\right\},\ A_n=const\ ,\ n=1,2,3,\dots,$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2\cdot t\right\}$$

– удовлетворяющее краевым условиям общее решение уравнения теплопроводности. Коэффициенты A_n можно найти из начального условия:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=\varphi(x).$$

Для этого надо разложить заданную на $[0,l]$ функцию $\varphi(x)$ в ряд Фурье по системе функций $\{X_n(x)\}$ на указанном отрезке (в рассматриваемом случае – по системе $\left\{\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$). Тогда A_n равны коэффициентам Фурье функции $\varphi(x)$ по системе $\{X_n(x)\}$.

Замечание. При решении задачи методом разделения переменных возникают следующие вопросы. Является ли полученная система собственных функций задачи Штурма-Лиувилля ортогональной? Какова норма каждой собственной функции? Является ли эта система функций полной? Представима ли заданная функция $\varphi(x)$ рядом Фурье по системе найденных собственных функций? Можно ли полученный в качестве решения ряд почленно дифференцировать (он должен удовлетворять дифференциальному уравнению)?

2. Методом разделения переменных решите 2-ую краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0;$$

$$u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\ t > 0;$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le l.$$

Решение. Частные решения уравнения теплопроводности, которые удовлетворяют обоим краевым условиям, будем искать в виде $X(x) \cdot T(t)$. Подставьте это произведение в уравнение и разделите на $a^2 \cdot X(x) \cdot T(t)$. Вы должны получить $\dfrac{X''_{xx}(x)}{X(x)} = \dfrac{T'_t(t)}{a^2 \cdot T(t)} = -\lambda = const$. Теперь подставьте $X(x) \cdot T(t)$ в краевые условия. Вы получите две задачи $\begin{cases} X''_{xx}(x) + \lambda \cdot X(x) = 0\,; \\ X'_x(0) = 0\,,\ X'_x(l) = 0 \end{cases}$ и $T'_t(t) + a^2 \cdot \lambda \cdot T(t) = 0$.

Общее решение уравнения для функции $X(x)$ определяется знаком действительного параметра λ. Запишите характеристическое уравнение для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Рассмотрите отдельно случаи $\lambda < 0,\ \lambda = 0,\ \lambda > 0$. В каждом случае запишите фундаментальную систему решений обыкновенного дифференциального уравнения и его общее решение. Общее решение содержит две произвольные постоянные. Можно ли однозначно определить эти постоянные из краевых условий при $\lambda < 0$? При $\lambda = 0$? При $\lambda > 0$? Является ли ненулевая постоянная собственной функцией? Вы должны получить собственные значения $\lambda_0 = 0\,; \lambda_n = \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2$; $n = 1\,, 2\,, 3\,, \ldots$ и отвечающие им собственные функции $X_0(x)=1$, $X_n(x)=\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$, $n=1,2,3,\ldots$. Скалярное произведение двух заданных на $[0,l]$ действительных функций $f(x)$ и $g(x)$ определяется выражением $(f,g)=\int_0^l f(x)\cdot g(x)dx$.

Проверьте, что $(X_i,X_j)=0$ при $i\neq j$ для системы собственных функций $\{X_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Евклидова норма функции $f(x)$ — это $\|f\|=\sqrt{(f,f)}$. Найдите $\|X_n\|^2$ для всех n. Вы должны получить $\|X_0\|^2=\int_0^l 1\cdot dx=l$, $\|X_n\|^2=\int_0^l\cos^2\frac{\pi n}{l}x\,dx=\frac{l}{2}$, $n=1,2,3,\ldots$.

Теперь при найденных λ_n надо найти общее решение уравнения для $T(t)$. При $\lambda=\lambda_0=0$ получаем $T_0(t)=A_0=const$, а при $\lambda=\lambda_n$, $n=1,2,3,\ldots$ $T_n(t)=A_n\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2\cdot t\right\}$, $A_n=const$.

Уравнению теплопроводности и краевым условиям для него удовлетворяют частные решения $X_0(x)\cdot T_0(t)=A_0=const$ и

$$X_n(x)\cdot T_n(t)=A_n\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t\right\},\ n=1,2,3,\ldots.$$

Поэтому и ряд $u(x,t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t\right\}\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$ формально удовлетворяет уравнению и краевым условиям. Подставьте полученный ряд при $t=0$ в начальное условие. Вы получите $u(x,0)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=\varphi(x)$. Разложите $\varphi(x)$ в ряд Фурье по системе $\left\{X_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ на $[0,l]$. Коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$ по ненормированной системе элементов $\left\{X_n(x)\right\}$ определяются так: $\varphi_n=\frac{(\varphi,X_n)}{\|X_n\|^2}$, $n=0,1,2,\ldots$.

Поэтому $\varphi_0=\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(x)dx;\ \varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx$. Полагая $A_n=\varphi_n,\ n=0,1,2,\ldots$, получаем формальное решение исходной начально-краевой задачи. Запишите его. Почему это лишь формальное решение? Что надо еще доказать для полного обоснования решения?

Могут ли быть другие решения начально-краевой задачи, отличные от построенного?

3.

$$u_t=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0;$$
$$u(0,t)=0,\ u_x(l,t)=0,\ t>0;$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le l.$$

Найдите в общем виде решение $u(x,t)$.

4.

$$u_t=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0;$$
$$u_x(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ t>0;$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le l.$$

Найдите в общем виде решение $u(x,t)$.

5.

$$u_t = u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0;$$
$$u_x(0,t) = 0\ ,\ u(1,t) = 0\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = x^2 - 1\ ,\ 0 \le x \le 1\ .$$

Найдите $u(x,t)$.

6.

$$u_t = u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0;$$
$$u_x(0,t) = 1\ ,\ u(l,t) = 0\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = 0\ .$$

Найдите $u(x,t)$.

7.

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0;$$
$$u(0,t) = 0\ ,\ u(l,t) = 0\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = \sin\frac{\pi}{l}x,\ 0 \le x \le l.$$

Найдите $u(x,t)$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t)$.

8.

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0;$$
$$u_x(0,t) = 0\ ,\ u(\pi,t) = 0\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = \cos(3x/2),\ 0 \le x \le \pi.$$

Найдите $u(x,t)$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t)$. Нарисуйте график зависимости от времени функции $u(0,t)$.

9.

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0;$$
$$u(0,t) = 0\ ,\ u_x(\pi,t) = 0\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = \sin(5x/2),\ 0 \le x \le \pi.$$

Найдите $u(x,t)$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t)$. Нарисуйте график зависимости от времени функции $u(\pi,t)$.

10.

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx}\ ,\ 0 < x < 1\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u_x(0,t) = 0\ ,\ u_x(1,t) = 0\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = x\ ,\ 0 \le x \le 1\ .$$

Найдите $u(x,t)$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t)$.

11.

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx}\ ,\ 0 < x < 1\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u(0,t) = u_1 = const\ ,\ u(1,t) = u_2 = const\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = u_0 \cdot x\ ,\ 0 \le x \le 1\ ;\ u_0 = const\ .$$

Найдите $u(x,t)$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t)$.

12.

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx} - b \cdot (u - U),\ 0 < x < l\ ,\ t > 0\ ,$$
$$b = const > 0\ ,\ U = const\ ;$$
$$u_x(0,t) = 0\ ,\ u(l,t) = U\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = u_0 = const\ ,\ 0 \le x \le l\ .$$

Найдите $u(x,t)$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t)$.

13.

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx}\ , 0 < x < l\ , t > 0\ ;$$
$$u_x(0,t) = p\ , u_x(l,t) = p\ , t > 0\ ; p = const\ ;$$
$$u(x,0) = 0\ , 0 \le x \le l\ .$$

Найдите $u(x,t)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$.

Дополнение к теме 3.

14. Решите задачу

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx}\ , 0 < x < l\ , t > 0\ ;$$
$$u_x(0,t) = 0\ , u_x(l,t) + h \cdot u(l,t) = 0\ , h = const > 0\ , t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = \varphi(x)\ , 0 \le x \le l\ ,$$

методом разделения переменных.

Указание. Поставьте задачу Штурма-Лиувилля. Найдите общее решение уравнения для функции $X(x)$. При каких λ можно удовлетворить краевым условиям выбором постоянных в этом решении? Получите при $\lambda > 0$ из правого краевого условия уравнение $tg\left(\sqrt{\lambda} \cdot l\right) = \dfrac{h}{\sqrt{\lambda}}$ относительно λ. Сделайте в нем замену $\theta = \sqrt{\lambda} \cdot l$. Нарисуйте графики функций $tg\,\theta$ и $\dfrac{const}{\theta}$. Как найти собственные значения задачи Штурма-Лиувилля? Сколько их? Какова асимптотика λ_n на бесконечности? Найдите собственные функции задачи X_n. Образуют ли они ортогональную систему? Найдите норму каждой собственной функции. Зависит ли $\|X_n\|$ от параметра h? Во что превратится $\|X_n\|$, если положить $h = 0$? Во что превратится правое краевое условие при $h = 0$? Сравните решение этой задачи с решением задачи 2.

15.

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx}\ , \quad 0 < x < l\ , \quad t > 0\ ;$$
$$u_x(0,t) - h \cdot u(0,t) = 0\ , \quad h = const > 0\ , \quad t > 0\ ;$$
$$u(l,t) = 0\ , \quad t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l.$$

Тема 4.

Решение начально-краевых задач для неоднородного уравнения теплопроводности.

Литература: [1], гл.III, § 2, п.4.

1. Решите в общем виде четыре начально-краевые задачи (первую краевую, вторую краевую и две смешанные) с неоднородностью $f(x,t)$ в уравнении теплопроводности и с нулевыми граничными и начальными условиями.

Указание. Чтобы решить начально-краевую задачу для неоднородного уравнения $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$ с нулевыми краевыми условиями 1-го или 2-го рода и нулевыми начальными условиями , решим сначала задачу Штурма-Лиувилля, отвечающую однородному уравнению $u_t = a^2 u_{xx}$ с теми же краевыми условиями. Разложим $f(x,t)$ при каждом фиксированном t в ряд Фурье по системе $\{X_n(x)\}$ собственных функций задачи Штурма-Лиувилля:

$$f(x,t) = \sum_n f_n(t) X_n(x) \quad , \quad \text{где} \quad f_n(t) = \frac{(f, X_n)}{\|X_n\|^2} \quad —$$

коэффициенты Фурье заданной функции f (здесь t играет роль параметра). Теперь решение исходной задачи можно искать в виде ряда Фурье по системе $\{X_n(x)\}$: $u(x,t) = \sum\limits_n T_n(t) X_n(x)$, где

коэффициенты Фурье $T_n(t)$ подлежат определению из неоднородного уравнения и начального условия. Для нахождения $T_n(t)$ надо сравнить коэффициенты при $X_n(x)$ в уравнении и в начальном условии и решить полученные задачи Коши.

2.

$$u_t = u_{xx} + \sin(3\pi x) \cdot e^{-9\pi^2 t} \text{ , } 0 < x < 1 \text{ , } t > 0 \text{ ;}$$
$$u(0,t) = 0 \text{ , } u(1,t) = 0 \text{ , } t > 0 \text{ ;}$$
$$u(x,0) = 0 \text{ , } 0 \le x \le 1 \text{ .}$$

Найдите $u(x,t)$.

3.

$$u_t = a^2 u_{xx} + f_0 \text{ , } 0 < x < l \text{ , } t > 0 \text{ ; } f_0 = const \text{ ;}$$
$$u(0,t) = 0 \text{ , } u(l,t) = 0 \text{ , } t > 0 \text{ ;}$$
$$u(x,0) = 0 \text{ , } 0 \le x \le l \text{ .}$$

Решение.

$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x$, $n = 1,2,3,\ldots,$ — собственные функции задачи Штурма - Лиувилля.

Коэффициенты Фурье постоянной функции f_0 по $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равны $f_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f_0 \sin\frac{\pi n}{l}x\,dx = \begin{cases} 0 \text{ , } если\ n = 2k \text{ ,} \\ \frac{4f_0}{\pi n} \text{ , } если\ n = 2k+1 \text{ .} \end{cases}$

Разложение её в ряд Фурье по $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на интервале $0 < x < l$ имеет вид $f_0 = \frac{4f_0}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi(2k+1)}{l}x}{2k+1}$. Для определения коэффициентов Фурье решения исходной задачи получаем задачи Коши:

$$T_n'(t)+\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t)=0\,, \qquad T_n'(t)+\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t)=\frac{4f_0}{\pi n}\,,$$

$$T_n(0)=0\,, \qquad T_n(0)=0\,,$$

если $n=2k$; *если* $n=2k+1$.

Ненулевые коэффициенты Фурье равны

$$T_{2k+1}(t)=\frac{4f_0 l^2}{(\pi(2k+1))^3 a^2}\left(1-\exp\left(-\left(\frac{\pi(2k+1)a}{l}\right)^2 t\right)\right),$$

$k=0,1,2,\dots$.

Запишите решение $u(x,t)$ в виде ряда. Найдите $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$.

4.

$$u_t=a^2u_{xx}+f_0\,,\ 0<x<l\,,\ t>0\,;\ f_0=const\,;$$
$$u_x(0,t)=0\,,\ u_x(l,t)=0\,,\ t>0\,;$$
$$u(x,0)=0\,,\ 0\le x\le l\,.$$

Найдите $u(x,t)$ (для этого не обязательно искать разложение в ряд Фурье). Существует ли конечный $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$?

5.

$$u_t=a^2u_{xx}+f_0\,,\ 0<x<l\,,\ t>0\,;\ f_0=const\,;$$
$$u(0,t)=0\,,\ u_x(l,t)=0\,,\ t>0\,;$$
$$u(x,0)=0\,,\ 0\le x\le l\,.$$

Найдите $u(x,t)$. Существует ли конечный $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$?

6.

$$u_t = a^2 u_{xx} + f_0 \, , 0 < x < l \, , t > 0 \, ; \, f_0 = const \, ;$$
$$u_x(0,t) = 0 \, , u(l,t) = 0 \, , t > 0 \, ;$$
$$u(x,0) = 0 \, , 0 \le x \le l \, .$$

Решите задачу, а затем получите её решение из решения задачи 5.

7.

$$u_t = a^2 u_{xx} \, , 0 < x < l \, , t > 0 \, ;$$
$$u_x(0,t) = 0 \, , u_x(l,t) = p \, , t > 0 \, ; \, p = const \, ;$$
$$u(x,0) = 0 \, , 0 \le x \le l \, .$$

Сделайте замену неизвестной функции так, чтобы для новой искомой функции оба краевых условия были нулевыми. Изменилось ли при этом уравнение? Начальное условие? Решите полученную задачу и найдите $u(x,t)$.

8.

$$u_t = u_{xx} + \cos(t) \, , 0 < x < \pi \, , t > 0 \, ;$$
$$u(0,t) = 0 \;\; , \;\; u(\pi,t) = 0 \, , t > 0 \, ;$$
$$u(x,0) = 0 \, , 0 \le x \le \pi \, .$$

Найдите $u(x,t)$.

9.

$$u_t = u_{xx} + 2 \, , 0 < x < \frac{\pi}{2} \, , t > 0 \, ;$$
$$u(0,t) = 2t \;\; , \;\; u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0 \, , t > 0 \, ;$$
$$u(x,0) = \sin 5x \, , 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \, .$$

Найдите $u(x,t)$.

10.

$$u_t = u_{xx} + 2 + 2\sin 5x \, , \, 0 < x < \frac{\pi}{2} \, , \, t > 0 \, ;$$

$$u(0,t) = 2t \; , \; u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0 \, , \, t > 0 \, ;$$

$$u(x,0) = 0 \, , \, 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \, .$$

Найдите $u(x,t)$.

11.

$$u_t = u_{xx} + x \, , \, 0 < x < \pi \, , \, t > 0 \, ;$$
$$u(0,t) = 0 \; , \; u(\pi,t) = 0 \, , \, t > 0 \, ;$$
$$u(x,0) = \sin 2x \, , \, 0 \le x \le \pi \, .$$

Найдите $u(x,t)$.

12. Уравнение $u_t = a^2 u_{xx} + b\,u + f(x,t)$ можно упростить заменой искомой функции $u = e^{bt} v$. Как при этом изменятся краевые и начальные условия?

Другой способ решения начально-краевых задач для указанного уравнения – искать его решения в виде ряда $\sum\limits_n T_n(t) X_n(x)$ по системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля, отвечающей уравнению $u_t = a^2 u_{xx}$ с теми же краевыми условиями. Получите обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $T_n(t)$ для каждого n.

Следующие задачи решите указанными в пункте 12 двумя способами.

13.

$$u_t = u_{xx} + u \, , 0 < x < 1 \, , t > 0 \, ;$$
$$u(0,t) = 0 \, , u(1,t) = t \, , t > 0 \, ;$$
$$u(x,0) = 0 \, , 0 \le x \le 1 \, .$$

14.

$$u_t = u_{xx} + u \, , 0 < x < 1 \, , t > 0 \, ;$$
$$u_x(0,t) = t \, , u_x(1,t) = t \, , t > 0 \, ;$$
$$u(x,0) = 0 \, , 0 \le x \le 1 \, .$$

15.

$$u_t = u_{xx} - u \, , 0 < x < 1 \, , t > 0 \, ;$$
$$u(0,t) = 0 \, , u_x(1,t) = t \, , t > 0 \, ;$$
$$u(x,0) = 0 \, , 0 \le x \le 1 \, .$$

16.

$$u_t = u_{xx} - u - 1 \, , 0 < x < 1 \, , t > 0 \, ;$$
$$u_x(0,t) = t \, , u(1,t) = 0 \, , t > 0 \, ;$$
$$u(x,0) = 0 \, , 0 \le x \le 1 \, .$$

17.

$$u_t = u_{xx} + u + \cos 2x \cdot \sin x \, , 0 < x < \pi \, , t > 0 \, ;$$
$$u(0,t) = 0 \, , u_x(\pi,t) = 0 \, , t > 0 \, ;$$
$$u(x,0) = 0 \, , 0 \le x \le \pi \, .$$

Решите следующие задачи методом разделения переменных.

18.

$$u_t = 4u_{xx} + 2tx + 2\cos\frac{5\pi}{2}x \, , 0 < x < 1 \, , t > 0 \, ;$$

$$u_x(0,t) = t^2 + 1 \ \ , \ u(1,t) = t^2 \ , t > 0 \, ;$$

$$u(x,0) = x - 1 \, , 0 \le x \le 1 \, .$$

19.

$$u_t = u_{xx} + x^2 - 2t + \cos 3x \, , 0 < x < \pi \, , t > 0 \, ;$$

$$u_x(0,t) = 1 \ \ , u_x(\pi,t) = 2\pi t + 1 \, , t > 0 \, ;$$

$$u(x,0) = x \, , 0 \le x \le \pi.$$

20.

$$u_t = u_{xx} + u + \cos x \cdot \sin\frac{x}{2} \, , 0 < x < \pi \, , t > 0 \, ;$$

$$u(0,t) = 0 \ \ , \ u_x(\pi,t) = 0 \, , t > 0 \, ;$$

$$u(x,0) = 0 \, , 0 \le x \le \pi \, .$$

21.

$$u_t = u_{xx} + u - x + 2\sin 2x \cdot \cos x \, ,$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \, , t > 0 \, ;$$

$$u(0,t) = 0 \ \ , u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 1 \, , t > 0 \, ;$$

$$u(x,0) = x \, , 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \, .$$

22.

$$u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t \,,\ 0 < x < 1 \,,\ t > 0 \,;$$
$$u(0,t) = 0 \ \ ,\ \ u(1,t) = t \,,\ t > 0 \,;$$
$$u(x,0) = e^x \sin \pi x \,,\ 0 \le x \le 1 \,.$$

23.

$$u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2 t + 2\cos^2 x \,,$$
$$0 < x < \pi \,,\ t > 0 \,;$$
$$u_x(0,t) = 0 \ \ ,\ \ u_x(\pi,t) = 2\pi t \,,\ t > 0 \,;$$
$$u(x,0) = 0 \,,\ 0 \le x \le \pi \,.$$

24.

$$u_t = u_{xx} - 2u_x + u + e^x \sin x - t \,,$$
$$0 < x < \pi \,,\ t > 0 \,;$$
$$u(0,t) = 1 + t \ \ ,\ \ u(\pi,t) = 1 + t \,,\ t > 0 \,;$$
$$u(x,0) = 1 + e^x \sin 2x \,,\ 0 \le x \le \pi \,.$$

25.

$$u_t = u_{xx} + u + xt(2 - t) + 2\cos t \,,$$
$$0 < x < \pi \,,\ t > 0 \,;$$
$$u_x(0,t) = t^2 \ \ ,\ \ u_x(\pi,t) = t^2 \,,\ t > 0 \,;$$
$$u(x,0) = \cos 2x \,,\ 0 \le x \le \pi \,.$$

Тема 5.

Задачи для уравнения теплопроводности на прямой и на полупрямой. Функция Грина.

Литература: [1], гл.III, § 1, п.7; гл.III, § 3, п.1,2; гл.III, § 2, п.2,4; Приложение IV к гл. III, п.1-3

1. Если при описании процесса распространения тепла в стержне нас интересует участок стержня, удалённый от обоих его концов, то в качестве модели, описывающей изменение температуры $u(x,t)$, получаем задачу с начальным условием — задачу Коши — для уравнения теплопроводности на прямой $-\infty < x < +\infty$. Дайте математическую постановку этой задачи в случае, когда боковая поверхность стержня теплоизолирована и нет внешних источников тепла.

Замечание. Обратите внимание на требование ограниченности функции $u(x,t)$. Что следует из этого требования? Каков его физический смысл?

Решите следующие задачи, пользуясь известными свойствами уравнения теплопроводности.

2.

$$u_t = 4u_{xx} + t + e^t \ , -\infty < x < +\infty \ , \ t > 0 \ ;$$
$$u(x,0) = 2 \ , -\infty < x < +\infty.$$

Решение. Начальная температура и плотность распределения источников тепла не зависят от x. Поэтому $u(x,t) \equiv V(t)$, поскольку с течением времени тепло не будет передаваться от одного участка стержня к другому. Подставим $V(t)$ в уравнение и проинтегрируем его: $V_t'(t) = t + e^t$, $V(t) = \frac{t^2}{2} + e^t + const$. Из начального условия найдем постоянную.

Ответ: $u(x,t) \equiv V(t) = \frac{t^2}{2} + e^t + 1$.

3.

$$u_t = u_{xx} + 3t^2 \,, -\infty < x < +\infty \,, t > 0 \,;$$

$$u(x,0) = \sin x \,, -\infty < x < +\infty \,.$$

Решение. Разобьём задачу на две:

$$u_t = u_{xx} + 3t^2 \,, -\infty < x < +\infty \,, t > 0 \,;$$
$$u(x,0) = 0 \,, -\infty < x < +\infty \,.$$

$$u_t = u_{xx} \,, -\infty < x < +\infty \,, t > 0 \,;$$
$$u(x,0) = \sin x \,, -\infty < x < +\infty \,.$$

Подобно задаче 2 находим решение задачи с неоднородным уравнением: $u_1(x,t) = t^3$.

Вторую задачу решаем методом разделения переменных с учетом периодичности начального условия. Метод разделения переменных даёт частные решения $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$, где $X(x) = a(k) \cdot \cos kx + b(k) \cdot \sin kx$, $T(t) = e^{-k^2 t}$. Только при $k = 1$ частное решение уравнения удовлетворяет начальному условию: $u_2(x,t) = e^{-t} \cdot \sin x$.

Ответ: $u = u_1 + u_2$.

4.

$$u_t = u_{xx} + e^{-t} \cdot \cos x \,, -\infty < x < +\infty \,, t > 0 \,;$$
$$u(x,0) = \cos x \,, -\infty < x < +\infty \,.$$

Указание. Учтите периодичность начального условия и неоднородности уравнения.

5.

$$u_t = u_{xx} + e^t \cdot \sin x\,,\; -\infty < x < +\infty\,,\; t > 0\,;$$
$$u(x,0) = \sin x\,,\; -\infty < x < +\infty\,.$$

6.

$$u_t = u_{xx} + \sin t\,,\; -\infty < x < +\infty\,, t > 0\,;$$
$$u(x,0) = e^{-x^2}\;,\; -\infty < x < +\infty\,.$$

Решение. Разобьём задачу на две:

$$u_t = u_{xx} + \sin t\,,\; -\infty < x < +\infty\,, t > 0\,;$$
$$u(x,0) = 0\,,\; -\infty < x < +\infty\,.$$

$$u_t = u_{xx}\;,\; -\infty < x < +\infty\,,\; t > 0\,;$$
$$u(x,0) = e^{-x^2}\;, -\infty < x < +\infty\;\;.$$

Задача с неоднородным уравнением имеет решение $u_1(x,t) \equiv V(t) = 1 - \cos t$. Чтобы решить вторую задачу, вспомните, что если $U(x,t)$ — решение уравнения $u_t = u_{xx}$, то и функция

$$\frac{1}{\sqrt{1+4ct}} \exp\left\{-\frac{c\,x^2}{1+4ct}\right\} \cdot U\left(\frac{x}{1+4ct}, \frac{t}{1+4ct}\right)$$

является его решением (см. задачу 5 темы 2). Возьмите $U(x,t) \equiv 1$. Осталось найти постоянную c из начального условия: $c = 1$.

7.

$$u_t = u_{xx}\;,\; -\infty < x < +\infty\,,\; t > 0\,;$$
$$u(x,0) = x\,e^{-x^2}\;,\; -\infty < x < +\infty\,.$$

Указание. Заметьте, что $u(x,t) = x$ удовлетворяет уравнению.

8.

$$4 \cdot u_t = u_{xx},\ -\infty < x < +\infty,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = e^{2x-x^2},\ -\infty < x < +\infty.$$

9.

$$4 \cdot u_t = u_{xx},\ -\infty < x < +\infty,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = \sin x \cdot e^{-x^2},\ -\infty < x < +\infty.$$

10. Решите в общем виде методом разделения переменных задачу Коши

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx},\ -\infty < x < +\infty,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\ -\infty < x < +\infty;$$
$$|u(x,t)| < const.$$

Пусть в точке x_0 функция $\varphi(x)$ имеет разрыв первого рода. Каким должен оказаться $\lim\limits_{t \to 0+} u(x_0, t)$?

Указание. Нетрудно догадаться, что если в общем виде решать задачу с начальным условием для уравнения теплопроводности методом разделения переменных на всей прямой $-\infty < x < +\infty$, а не на конечном отрезке, то решение получим не в виде ряда Фурье, а в виде интеграла Фурье. Подставьте функцию $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ в уравнение $u_t = a^2 u_{xx}$ и разделите переменные. Вы должны получить два уравнения: $X''_{xx} + \lambda \cdot X = 0$ и $T'_t + a^2 \cdot \lambda \cdot T = 0$, где $\lambda = k^2 > 0$. Откуда следует условие $\lambda = k^2 > 0$? Все ли действительные k годятся? Запишите частное решение исходного уравнения теплопроводности, отвечающее фиксированному k. Запишите его общее решение. Вы должны получить $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(k) \cdot \exp\{-a^2 k^2 t + ikx\} dk$ (i —мнимая единица). Осталось выбрать $A(k)$ из начального условия $u(x,0)=\varphi(x)$; как связаны $\varphi(x)$ и $A(k)$?

11. В решении задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности на прямой

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\{-ik\xi\}d\xi\right)\exp\{-a^2k^2t+ikx\}dk$$

поменяйте порядок интегрирования. Запишите интегральное представление решения вида $u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi;t)\varphi(\xi)d\xi$.

Указание. После изменения порядка интегрирования решение исходной задачи выглядит так:

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi;t)\varphi(\xi)d\xi,$$ где

$$G(x,\xi;t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-a^2k^2t+ik(x-\xi)\}dk.$$ Всегда ли выполнима операция изменения порядка интегрирования? В каком смысле существуют внутренний, внешний интегралы, задающие $u(x,t)$?

Вычислите интеграл, которым определена функция G. Рассмотрите для этого два интеграла: $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\,dx=2\int_{0}^{+\infty}e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\,dx$, где $\alpha=const>0$, и $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2}\sin\beta x\,dx$. Вычислите первый интеграл дифференцированием по параметру β. Вы должны получить

$$G(x,\xi;t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}.$$

Удовлетворяет ли G как функция переменных x и t при фиксированном значении ξ однородному уравнению теплопроводности?

Функция G называется функцией Грина уравнения теплопроводности на прямой или функцией влияния мгновенного точечного источника.

12. Зная функцию влияния мгновенного источника, запишите решение задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ -\infty < x < +\infty,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = 0,\ -\infty < x < +\infty.$$

Указание. Пусть $u(x,t) = 0$ для всех x при $t < 0$, а в момент времени $t = 0$ в точке с координатой ξ мгновенно выделилось количество тепла $Q = c\rho$ — сработал мгновенный точечный источник тепла (c, ρ см. в теме 2). Если боковая поверхность стержня теплоизолирована, то со временем переданное стержню тепло Q не изменится, но расплывётся по всей прямой $-\infty < x < +\infty$. Тогда температура в точке x в момент времени $t > 0$, обусловленная теплопроводностью в стержне, будет равна $G(x,\xi;t)$.

Пусть описанный выше мгновенный точечный источник тепла сработал в момент времени $\tau \geq 0$. Запишите $u(x,t)$. Пусть в один и тот же момент времени τ срабатывают два мгновенных источника различной мощности. Как найти $u(x,t)$? Как найти температуру $u(x,t)$, если одновременно срабатывающие источники тепла непрерывно распределены вдоль прямой $-\infty < x < +\infty$ с заданной плотностью их распределения? Наконец, пусть в каждый момент времени $\tau \geq 0$ в каждой точке ξ прямой $-\infty < x < +\infty$ срабатывает мгновенный точечный источник тепла. Как найти $u(x,t)$?

13. Найдите $\lim\limits_{t \to 0+} G_{x \neq \xi}$ и $\lim\limits_{t \to 0+} G_{x=\xi}$. Какова температура в точке, где срабатывает источник, в момент его срабатывания? Возможна ли такая температура в реальном стержне? Может ли реальный физический источник выделить конечное количество тепла в единственной точке ξ?

Нарисуйте графики функции G (при фиксированных ξ и t) в разные моменты времени. Что происходит при $t \to +\infty$? При $t \to 0+$?

Может ли температура в сколь угодно удаленной от ξ точке реального стержня сразу измениться из-за выделения тепла в точке ξ?

14. Выполнив замену искомой функции $u(x,t) = e^{-ht} v(x,t)$, найдите функцию Грина для уравнения $u_t = a^2 u_{xx} - hu$, $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$. С помощью найденной функции Грина запишите решение задачи
$u_t = a^2 u_{xx} - hu + f(x,t)$, $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$;
$u(x,0) = \varphi(x)$, $-\infty < x < +\infty$.

В следующих задачах решения выражаются через функцию $\Phi(z) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-x^2} dx$ — интеграл ошибок. Полезно помнить, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} \quad , \quad \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

15.

$$u_t = a^2 u_{xx}\ , -\infty < x < +\infty\ , t > 0\ ;$$

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} u_1 = const\ , x < 0\ ; \\ u_2 = const\ , x > 0\ . \end{cases}$$

Решение.

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi;t)\varphi(\xi)d\xi = \frac{u_1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{0} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\}d\xi +$$

$$+ \frac{u_2}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\}d\xi\ .$$

Выполните замену переменной интегрирования: $\alpha = \dfrac{(x-\xi)}{2a\sqrt{t}}$. Вы должны получить

$$u(x,t) = \frac{u_1+u_2}{2} + \frac{u_2-u_1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \frac{u_1+u_2}{2} + \frac{u_2-u_1}{2}\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

Найдите $\lim\limits_{t\to 0+} u(0,t)$, $\lim\limits_{t\to +\infty} u(x,t)$.

16.

$$u_t = a^2 u_{xx}\ , -\infty < x < +\infty\ , t > 0\ ;$$

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} 0 \quad , -\infty < x < -l\ ; \\ u_0 = const \neq 0\ , -l < x < l\ ; \\ 0 \quad , l < x < +\infty\ . \end{cases}$$

Найдите $u(x,t)$, $\lim\limits_{t\to 0+} u(-l,t)$, $\lim\limits_{t\to 0+} u(l,t)$.

17.

$$u_t = u_{xx}\ , -\infty < x < +\infty\ , t > 0\ ;$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & , x < 0\ ; \\ e^{-\alpha x} & , x > 0\ ; \quad \alpha = const > 0\ . \end{cases}$$

18. Если при описании температуры стержня нас интересует его участок, удалённый от одного конца стержня, то в качестве модели процесса получаем начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на полупрямой $x \geq 0$. Дайте постановку этой задачи в случае краевого условия 1-го, 2-го рода. Проведите редукцию общей начально-краевой задачи на полупрямой; получите задачу с нулевым краевым условием. Найдите функцию Грина уравнения теплопроводности на полупрямой, отвечающую краевому условию 1-го, 2-го рода.

Указание. Начально-краевую задачу для однородного уравнения теплопроводности на полупрямой с нулевым краевым условием можно свести к задаче Коши на всей прямой. Это сведение основано на следующих двух фактах.

Если $\varphi(x)$ — нечётная функция на $-\infty < x < +\infty$, то функция

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(\xi)\, d\xi$$

обращается в нуль при $x = 0$ во все моменты времени t: $u(0,t) = 0$.

Если $\varphi(x)$ — чётная функция на $-\infty < x < +\infty$, то производная u_x указанной функции обращается в нуль при $x = 0$ во все моменты времени t: $u_x(0,t) = 0$.

Сведите задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}\ , 0 < x < +\infty\ , t > 0\ ;$$

$$u(0,t) = 0\ , t > 0\ ;$$

$$u(x,0) = \varphi(x)\ , 0 \leq x < +\infty$$

к задаче Коши на всей прямой. Найдите функцию Грина $G(x,\xi;t)$ исходной задачи на $0 \le x < +\infty$. (Помните, что в ответе не может быть значений $x < 0$.) Запишите её решение в виде $u(x,t) = \int_0^{+\infty} G(x,\xi;t)\varphi(\xi)d\xi$. Запишите решение аналогичной задачи для неоднородного уравнения.

Сведите задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}\ ,\ 0 < x < +\infty\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u_x(0,t) = 0\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = \varphi(x)\ ,\ 0 < x < +\infty$$

к задаче Коши на всей прямой. Найдите функцию Грина $G(x,\xi;t)$ исходной задачи на $0 \le x < +\infty$. Запишите её решение в виде $u(x,t) = \int_0^{+\infty} G(x,\xi;t)\varphi(\xi)d\xi$. Запишите решение аналогичной задачи для неоднородного уравнения.

19.

$$u_t = a^2 u_{xx}\ ,\ 0 < x < +\infty\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u_x(0,t) = 0\ ,\ t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = \begin{cases} u_0 = const \ne 0\ ,\ 0 \le x \le l\ ; \\ 0\ ,\ l < x < +\infty\ . \end{cases}$$

Найдите $u(x,t)$, $\lim\limits_{t\to 0+} u(l,t)$, $\lim\limits_{t\to +\infty} u(x,t)$. Нарисуйте график изменения температуры в точке $x = 0$.

20. Боковая поверхность полуограниченного стержня $x \ge 0$ и его конец $x = 0$ теплоизолированы. Начальная температура равна $e^{-\alpha x^2}$, $\alpha = const > 0$.

Найдите температуру стержня $u(x,t)$ во все моменты времени и $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$.

21. Полуограниченный стержень $x \geq 0$ имеет нулевую начальную температуру. Его боковая поверхность теплоизолирована, а конец $x = 0$ поддерживается при температуре $u_0 = const \neq 0$ при $t > 0$. Найдите температуру стержня $u(x,t)$ во все моменты времени и $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$. Найдите поток тепла через конец $x = 0$ при $t \geq 0$.

22.

$$u_t = a^2 u_{xx} - h(u - u_0),\ 0 < x < +\infty,\ t > 0;$$
$$h = const > 0;\ u(0,t) = u_0 = const,\quad t > 0;$$
$$u(x,0) = 0;\ 0 \leq x < +\infty.$$

Дайте физическую интерпретацию задачи и решите её.

23. Решения начально-краевых задач на конечном отрезке $0 \leq x \leq l$ тоже можно записать через функцию Грина соответствующей задачи. Например, полученное методом разделения переменных решение задачи

$$u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0;$$
$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \leq x \leq l,$$

имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi \right) \exp\left\{ -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t \right\} \sin\frac{\pi n}{l} x =$$

$$= \int_0^l \left(\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{ -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t \right\} \sin\frac{\pi n}{l} x \cdot \sin\frac{\pi n}{l}\xi \right) \varphi(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_0^l G(x,\xi;t)\varphi(\xi d\xi).$$

Запишите решение аналогичной задачи для неоднородного уравнения.

Найдите функции Грина задач 2, 3, 4 из темы 3. Как выглядят решения аналогичных задач для неоднородного уравнения?

Дополнение к теме 5.

24. Функция Грина (функция влияния мгновенного точечного источника) $G(x,\xi;t-\tau)$ — это изменение температуры в точке x за время $t-\tau$, которое обусловлено мгновенным выделением тепла $Q = c\rho$ в точке ξ в момент времени τ. Зададимся следующими вопросами. Что подразумевается под мгновенным выделением конечного количества тепла? Что значит выделение тепла в единственной точке? Можно ли указанный мгновенный точечный источник тепла учесть в виде неоднородности уравнения теплопроводности? Эти вопросы приводят к важному понятию δ - функции — математическому объекту, который не является функцией в обычном смысле.

Пусть на прямой $-\infty < x < +\infty$ имеется достаточно большой запас “пробных функций “ $\psi(x)$. Можно считать, что все они бесконечно дифференцируемы и обращаются в нуль на бесконечности. Функционал f — это отображение, которое каждой функции ψ ставит в соответствие число; функция ψ — аргумент функционала. Действие функционала с именем f на функцию ψ можно записать в виде (f,ψ). Нас будут интересовать линейные по ψ функционалы (и в определенном смысле непрерывные по ψ). Некоторые из них можно задать при помощи обычных функций $f(x)$ и присвоить им имена этих функций: $(f,\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi(x)dx$. Другие функционалы нельзя задать таким способом; например, $(\delta,\psi) = \psi(0)$. Последнее равенство определяет функционал с именем δ, который и называют “ δ - функцией “ (сосредоточенной в точке $x = 0$). Если мы хотим иметь возможность сдвигать значение аргумента x пробной функции ψ в этом равенстве, то введём функционал с именем $\delta(x - x_0)$ по правилу $(\delta(x-x_0),\psi) = \psi(x_0)$. Таким образом, сосредоточенная в нуле δ - функция — это $\delta(x)$. Здесь x нельзя рассматривать как аргумент функции в обычном смысле: $\delta(x)$ — единый символ, имя функционала; аргумент этого функционала —пробная функция ψ. Указанные линейные и непрерывные по ψ функционалы называют обобщенными функциями.

Иногда действие функционала $\delta(x-x_0)$ на пробную функцию ψ записывают в виде $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\psi(x)dx$, понимая этот интеграл либо как единый символ, эквивалентный $(\delta(x-x_0),\psi)=\psi(x_0)$, либо как результат приближения δ - функции обычными функциями. Говорят, что последовательность обобщённых функций $\{f_n\}$ сходится к обобщённой функции f, если для любой пробной функции ψ числовая последовательность (f_n,ψ) сходится к (f,ψ) при $n\to\infty$. Тем самым обобщённую функцию f можно приближать, например, обычными функциями $f_n(x)$ в том смысле, что для любой пробной функции ψ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)\psi(x)dx\to(f,\psi)$ при $n\to\infty$. Это вовсе не означает, что $\{f_n(x)\}$ сходится к f при каждом фиксированном x. Вспомните предел при $t_n\to 0+$ функций $G(x,\xi;t_n)$ из задачи 13:

$$\lim_{t\to 0+}G(x,\xi;t)=\begin{cases}0\,, x\neq\xi;\\ +\infty, x=\xi.\end{cases}$$

Последний предел не является разумным образом определённой функцией. На самом деле речь идёт о сходимости последовательности обычных функций одной переменной x $G(x,\xi;t_n)$ (ξ — параметр) к $\delta(x-\xi)$ в смысле обобщённых функций.

Бессмысленно говорить о "значении" δ - функции в какой-либо точке x, но её можно приблизить обычными функциями с любой точностью в указанном выше смысле. Понятие обобщённой функции даёт возможность выразить в математически корректной форме такие идеализированные понятия, как интенсивность мгновенного источника тепла, объёмную плотность сосредоточенной в одной точке массы и т.д. С другой стороны, это понятие отражает тот факт, что реально нельзя измерить значение физической величины в точке, а можно измерять лишь её средние значения в достаточно малых окрестностях данной точки. Для прояснения сказанного попробуйте определить объёмную плотность единичной точечной массы, сосредоточенной в начале координат. Если равномерно распределить эту массу внутри шара радиуса ε с центром в начале координат, то средняя плотность массы равна

$$\rho_\varepsilon(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{3}{4\pi\varepsilon^3}, & \sqrt{x^2+y^2+z^2}<\varepsilon,\\ 0, & \sqrt{x^2+y^2+z^2}>\varepsilon.\end{cases}$$

Если в качестве искомой плотности взять поточечный предел , то получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\rho_\varepsilon(x,y,z)=\begin{cases}0, & \sqrt{x^2+y^2+z^2}\neq 0,\\ +\infty, & x=y=z=0.\end{cases}$$

Но от искомой плотности естественно требовать , чтобы интеграл от неё по любой пространственной области , содержащей начало координат, давал бы массу вещества в этой области, т.е. единицу. Поэтому поточечный предел ρ_ε при $\varepsilon\to 0+$ не годится на роль плотности сосредоточенной в точке массы. Вместо него надо взять слабый предел, т.е. предел в смысле сходимости обобщённых функций. Этот предел как раз и есть δ - функция:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\iiint\limits_{\sqrt{x^2+y^2+z^2}<\varepsilon}\rho_\varepsilon(x,y,z)\psi(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\psi(0,0,0)$$ для любой ψ из запаса пробных функций (докажите этот факт, пользуясь непрерывностью $\psi(x,y,z)$).

Приведите примеры последовательностей обычных функций, сходящихся в слабом смысле к δ - функции.

Выберем дифференцируемую обычную функцию одной переменной $f(x)$ и зададим функционал f': $(f',\psi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\psi(x)dx$. Вычислим интеграл по частям и вспомним, что мы выбирали пробные функции $\psi(x)$, для которых $\psi(-\infty)=\psi(+\infty)=0$.

Тогда $(f',\psi)=-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\psi'(x)dx=-(f,\psi')$. Производная любой обобщённой функции определяется точно так же: если f — обобщённая функция, то f' — имя функционала, действующего по правилу $(f',\psi)=-(f,\psi')$ для каждой пробной функции ψ. Тем самым все обобщённые функции имеют обобщённые производные любого порядка. Например, разрывная обычная функция $\theta(x)=\begin{cases}0\,,\ x<0\\1\,,\ x\geq 0\end{cases}$ имеет обобщённую производную $\theta'=\delta(x)$, поскольку

$$(\theta',\psi)=-(\theta,\psi')=-\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(x)\psi'(x)dx=-\int_{0}^{+\infty}\psi'(x)dx=\psi(0)=$$

$$=(\delta(x),\psi).$$

Если у всех пробных функций ψ существует преобразование Фурье $\widehat{\psi}$ (мы можем выбрать такой запас функций ψ), то преобразование Фурье обобщённой функции f — это функционал $\widehat{f}$, действующий по правилу $\left(\widehat{f},\psi\right)=\left(f,\widehat{\psi}\right)$.

Можно выбрать запас пробных функций ψ, определённых на интервале $-l<x<l$. Тогда обобщённые функции можно раскладывать в ряды Фурье. Например, $\delta(x)=\dfrac{1}{2l}+\dfrac{1}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{\pi n}{l}x$. Последний ряд, который в обычном смысле расходится, надо понимать как имя функционала, действие которого на разложимую в ряд Фурье по системе $\left\{1,\cos\dfrac{\pi}{l}x,\sin\dfrac{\pi}{l}x,\ldots,\cos\dfrac{\pi n}{l}x,\sin\dfrac{\pi n}{l}x,\ldots\right\}$ на $-l<x<l$ функцию $\psi(x)$ аналогично действию функционала $\delta(x)$. В самом деле: $\psi(x_0)=\int\limits_{-l}^{l}\delta(x-x_0)\psi(x)dx$, а с другой стороны,

$$\int_{-l}^{l}\left(\frac{1}{2l}+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi n}{l}(x-x_0)\right)\psi(x)dx=$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\psi(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\cos\frac{\pi n}{l}x\cdot\psi(x)dx\right)\cos\frac{\pi n}{l}x_0+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\psi(x)dx\right)\sin\frac{\pi n}{l}x_0\right)=\psi(x_0),$$

поскольку ψ разложима в ряд Фурье. Следовательно, функционалы с именами $\delta(x-x_0)$ и $\left(\frac{1}{2l}+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi n}{l}(x-x_0)\right)$ действуют одинаково.

Докажите, что на интервале $0<x<l \quad \delta(x-x_0)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x_0$.

Совершенно аналогично можно выбрать запас пробных функций $\psi(x,t)$ и ввести обобщённые функции как действующие на ψ линейные непрерывные функционалы. Тогда можно определить обобщённые частные производные обобщённых функций:

$$(f'_x,\psi)=-(f,\psi'_x),\ (f'_t,\psi)=-(f,\psi'_t),\ (f''_{xx},\psi)=(-1)^2(f,\psi''_{xx})$$

и т.д. Уравнение теплопроводности $u_t=a^2u_{xx}$, например, означает теперь равенство обобщённых функций u_t и a^2u_{xx}: $(u_t,\psi)=(a^2u_{xx},\psi)$ для любой ψ. Теперь становится ясно, как действие мгновенного точечного источника тепла записать в дифференциальном уравнении. Пусть в точке ξ в момент времени τ мгновенно выделилось количество тепла Q (а температура стержня до момента τ была нулевой). Тогда дифференциальное уравнение баланса тепла имеет вид $c\rho u_t=ku_{xx}+Q\delta(x-\xi,t-\tau)$ или $u_t=a^2u_{xx}+\frac{Q}{c\rho}\delta(x-\xi,t-\tau)$. По определению функции Грина решением этого уравнения при $t>\tau$ является $u(x,t)=G(x,\xi;t-\tau)\frac{Q}{c\rho}$. Если источники тепла распределены по пространственной переменной и по времени, то все их действия надо просуммировать.

Понятие обобщённого решения задачи для дифференциального уравнения или даже только использование обобщённых функций в постановке задачи может существенно упростить ответы на многие вопросы.

25.

$$u_t = a^2 u_{xx}\ , 0 < x < +\infty\ , t > 0\ ;$$
$$u_x(0,t) = \gamma(t)\ , t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = 0\ , 0 \le x < +\infty\ .$$

Решение. Задание потока тепла в точке $x = 0$ можно рассматривать как источник тепла мощности $Q(t) = -k\,\gamma(t)$, помещённый на конце стержня. Следовательно, при фиксированном τ уравнение и краевое условие можно записать в виде $u_t = a^2 u_{xx} + \left(-\dfrac{k\,\gamma(\tau)}{c\rho}\right)\delta(x, t-\tau)$. Так как источник поставляет тепло на стержень во все моменты времени τ, $0 < \tau < t$, то решение исходной задачи имеет вид

$u(x,t) = \displaystyle\int_0^t \left(-\frac{k\,\gamma(\tau)}{c\rho}\right) G(x, \xi = 0; t-\tau)\, d\tau$, где G — функция Грина для уравнения теплопроводности на полупрямой с краевым условием второго рода (см.пункт18).

$$u(x,t) = -a^2 \int_0^t \left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^{-1} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}_{\xi=0} \cdot \gamma(\tau)\, d\tau -$$

$$-a^2 \int_0^t \left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^{-1} \cdot \exp\left\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}_{\xi=0} \cdot \gamma(\tau)\, d\tau =$$

$$= -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \gamma(\tau)\, d\tau\ .$$

26.

$$u_t = a^2 u_{xx}\ , 0 < x < l\ , t > 0\ ;$$

$$u(0,t) = 0\ , u(l,t) = 0\ , t > 0\ ;$$

$$u(x,0) = \delta(x-\xi) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n}{l}x \sin\frac{\pi n}{l}\xi\ ,$$

$$0 < x < l\ , 0 < \xi < l\ .$$

Найдите функцию Грина, исходя из разложения решения этой задачи в ряд по собственным функциям. Сравните с результатом задачи 23.

Найдите таким же способом функции Грина задач 2, 3, 4 из темы 3. Обоснуйте для этого соответствующие разложения δ - функции в ряды по собственным функциям этих задач.

— 1+ 4 сем

Тема 6.

Уравнения Лапласа и Пуассона . Постановки внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана. Фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Литература: [1], гл. IV , §1, п.1,2,4,5; гл. IV , §2, п.3,4,6,7,8; гл. IV , §5, п.2.

1. Для следующих функций $u = u(x,y,z)$ (x , y , z – декартовы координаты точки в пространстве) найдите $grad\, u$ и $div\, grad\, u$. Какие из указанных функций являются гармоническими?

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ ,\ x^2+y^2+z^2 \neq 0; \qquad u_2 = e^{xyz}\ ;$$

$$u_3 = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z\ ; \qquad u_4 = \sin 3x \cdot \sin 4y \cdot sh 5z\ .$$

2. Среди следующих векторных полей $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$ найдите те, для которых выполнено условие $rot\,\vec{A} = 0$, и представьте найденные поля в виде $\vec{A} = grad\,u(x, y, z)$.

$$\vec{A}_1 = \frac{\{x, y, z\}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad x^2 + y^2 + z^2 \neq 0;$$

$$\vec{A}_2 = \{\sin y \cdot \sin z, \sin x \cdot \sin z, \sin x \cdot \sin y\};$$

$$\vec{A}_3 = \{yz, xz, xy\}; \qquad \vec{A}_4 = \{xz, yz, xy\}.$$

3. В каждой точке сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ найдите производную функции $u = u(x, y, z)$ по направлению внешней нормали к сфере в этой точке.

$$u_1 = x \cdot y \cdot z; \qquad u_2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

$$u_3 = x^3 + y^3 + z^3.$$

4. Найдите поток вектора $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$ через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

$$\vec{A}_1 = \{x, y, z\}; \quad \vec{A}_2 = \{x^3, y^3, z^3\}; \quad \vec{A}_3 = \{x^2yz, xy^2z, xyz^2\}.$$

Указание. Примените формулу Остроградского.

5. Среди следующих функций $u = u(x, y)$ (x, y – декартовы координаты точки на плоскости) найдите гармонические.

$$u_1 = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ x^2 + y^2 \neq 0; \qquad u_2 = x^2 - y^2 + xy;$$

$$u_3 = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \neq 0; \quad u_4 = \cos x \cdot sh\,y - sh\,x \cdot \sin y;$$

$u_5 = e^{\frac{y}{x}}$, $x \neq 0$; $u_6 = e^{xy}$; $u_7 = \mathrm{Re}\left(z^2 \cdot e^z\right)$, $z = x + iy$;

$u_8 = e^{x^2+y^2}$; $u_9 = \mathrm{Im}(\sin z - ch\, z)$, $z = x + iy$;

$u_{10} = v^2(x,y)$, где $v(x,y)$ – гармоническая функция, $v \neq const$.

6. Запишите стационарное уравнение теплопроводности в пространстве в случае однородной среды (уравнение Пуассона). Запишите его для случая, когда в теле нет источников тепла (уравнение Лапласа).

Указание. См. задачу 4 темы 2.

7. В области Ω пространства движется жидкость со скоростью $\vec{v}(x,y,z,t)$; $\rho(x,y,z,t)$ – объёмная плотность массы жидкости в точке (x,y,z) в момент времени t. В области Ω нет источников или стоков жидкости. Выведите уравнение неразрывности $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \cdot \vec{v}) = 0$.

Запишите уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости ($\rho = const$). Запишите это уравнение для потенциального (т.е. безвихревого) течения. Что получилось бы, если бы в Ω действовали источники жидкости?

Указание. Рассмотрите течение жидкости в произвольной подобласти Ω' с гладкой границей S. Если жидкость только протекает через Ω , а не впрыскивается внутрь области и не отсасывается изнутри , то масса жидкости в Ω' определяется её количеством, пересекающим границу S. Запишите массу жидкости в Ω' в фиксированный момент времени. Запишите массу жидкости, покидающей область Ω' в единицу времени в момент t (т.е. поток вектора $\rho\vec{v}$ через S; учтите, что $\vec{n}$ — внешняя нормаль к S). Запишите баланс вещества за промежуток времени $[t_1, t_2]$: изменение массы жидкости в Ω' за указанный промежуток времени обусловлено протеканием её через границу S. Примените формулу Остроградского к потоку вектора $\rho\vec{v}$ через S, разделите уравнение баланса вещества на $t_2 - t_1$ и устремите $t_2 - t_1$ к нулю. Вы должны получить $\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v})\right)dx\,dy\,dz = 0$ — закон сохранения массы (баланс вещества) в интегральной форме. Используя произвольность области Ω', запишите закон сохранения массы в дифференциальной форме.

8. Выведите дифференциальное уравнение для потенциала электростатического поля.

Выведите дифференциальное уравнение для потенциала стационарного электрического тока.

Указание. В классической электродинамике для описания электромагнитного поля в материальной среде вводятся четыре векторных поля: напряженность электрического поля $\vec{E}$, электрическая индукция $\vec{D}$, напряженность магнитного поля $\vec{H}$ и магнитная индукция $\vec{B}$, которые зависят от точки (x, y, z) пространства и времени t. Электромагнитное поле описывается уравнениями Максвелла, которые в абсолютной системе физических единиц Гаусса имеют вид:

$$rot\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j},$$

$$rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$div\,\vec{B} = 0,$$

$$div\,\vec{D} = 4\pi\rho,$$

где $\rho(x, y, z, t)$ — заданная объёмная плотность электрического заряда, $\vec{j}(x, y, z, t)$ — заданное векторное поле плотности электрического тока (заряд, проходящий в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению его движения), а c —скорость света в вакууме. ρ и $\vec{j}$ — источники тока. Для большинства сред выполнены уравнения состояния: $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$ и $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ — закон Ома ; здесь ε — диэлектрическая проницаемость среды, μ — её магнитная проницаемость, σ — удельная электропроводность. Из уравнений Максвелла следует уравнение неразрывности $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + div\ \vec{j} = 0$, выражающее закон сохранения электрического заряда (сравните с пунктом 7).

Рассмотрите случай электростатики, когда все электрические заряды неподвижны. Как выглядит в этом случае второе уравнение Максвелла? Во что превращается четвертое уравнение? Во что оно превращается, если в рассматриваемой области пространства электрических зарядов нет?

Рассмотрите случай, когда в интересующей нас области пространства нет источников тока (т.е. $div\,\vec{j} = 0$) и электрический ток стационарный (как тогда выглядит второе уравнение?). Какому уравнению удовлетворяет потенциал стационарного тока?

9. Запишите постановку внутренней (т.е. в ограниченной области $\Omega \subset R^3$ или $D \subset R^2$) задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Зачем надо требовать непрерывность искомой функции в замкнутой области?

10. Запишите постановку внешней (т.е. вне ограниченной области) задачи Дирихле для уравнения Лапласа в пространственном случае. Какое условие гарантирует единственность решения этой задачи? Приведите пример задачи, имеющей более одного решения, если указанным условием пренебречь.

Запишите постановку внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в плоском случае. Какое условие теперь гарантирует единственность решения? Приведите пример задачи, имеющей более одного решения, если указанным условием пренебречь. Можно ли это условие заменить на его аналог из пространственного случая?

11. Запишите постановку внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа (в ограниченной области $\Omega \subset R^3$ или $D \subset R^2$). Какому условию должны подчиняться данные на границе, чтобы решение задачи существовало? Каков физический смысл этого условия? В каком смысле решение задачи единственно?

12. Пусть Ω – ограниченная область в пространстве. Приведите примеры гармонических в $R^3 \setminus \Omega$ функций, которые регулярны на бесконечности; не являются регулярными на бесконечности.

Приведите аналогичные примеры функций вне ограниченной области D на плоскости.

Замечание. Заданная вне ограниченной области гармоническая функция u называется регулярной на бесконечности, если при $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to \infty$ $u(x, y, z) = o(1)$ в пространственном случае или при $\sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$ $u(x, y) = O(1)$ в плоском случае. Функция u называется решением задачи Неймана для уравнения Лапласа во внешности ограниченной области, если она там гармонична, непрерывно дифференцируема в замыкании неограниченной области, удовлетворяет условию $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nu$ на границе и регулярна на бесконечности. Внешняя задача Неймана для уравнения Лапласа в пространственном случае не может иметь более одного решения, а в плоском случае решение (если оно существует) определяется с точностью до постоянного слагаемого.

13. Пусть r, φ — полярные координаты, а x, y — декартовы координаты на плоскости. Считая, что $u = u(r(x, y), \varphi(x, y))$, найдите производные u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy} и выражение для оператора Лапласа $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ в полярной системе координат. Как выглядит оператор Лапласа в цилиндрической системе координат r, φ, z в пространстве? Во

что превращается уравнение Лапласа в центрально-симметричном случае на плоскости (в осесимметричном случае в пространстве)?

14. Пусть r, φ, θ — сферические координаты, а x, y, z — декартовы координаты в пространстве. Считая, что $u = u(r(x,y,z), \varphi(x,y,z), \theta(x,y,z))$, найдите производные $u_x, u_y, u_z, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}$ и выражение для оператора Лапласа $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ в сферической системе координат. Во что превращается уравнение Лапласа в сферически симметричном случае в пространстве? Найдите его общее решение в этом случае.

15. Пусть r, φ, θ — сферические координаты в пространстве. Функция $u = \frac{1}{r}$ называется фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве. Проверьте, что $\frac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме начала координат. Дайте электростатическую интерпретацию этому решению.

16. Пусть r, φ — полярные координаты на плоскости x, y. Функция $u = \ln\frac{1}{r}$ называется фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости. Проверьте, что $\ln\frac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме начала координат. Дайте электростатическую интерпретацию этому решению.

Указание. Пусть ось z декартовой системы координат в пространстве равномерно заряжена с постоянной линейной плотностью заряда e (т.е. заряд, приходящийся на единицу длины оси, равен e). Зависит ли напряженность $\vec{E}$ создаваемого всей осью z электростатического поля в точке (x, y, z) от координаты z? От чего зависит напряженность этого поля?

Нарисуйте вектор $\vec{E}$. Выберите точку P на расстоянии r от оси z и произвольный малый промежуток на оси z длиной dz. Найдите напряженность $\vec{E}_{dz}$ поля в точке P, создаваемого выбранным промежутком dz. Найдите составляющую вектора $\vec{E}_{dz}$, перпендикулярную оси z. Интегрируя по всей оси z, найдите величину вектора $\vec{E}$. Вспомните, что $\vec{E} = -grad\, u$, где u — потенциал электростатического поля. Запишите вектор $grad\, u$ в рассматриваемом осесимметричном случае в цилиндрической системе координат. Найдите потенциал $u(r)$ равномерно заряженной оси z.

Тема 7.

Решение краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона методом разделения переменных в двумерных областях.

Литература: [1], гл. IV ,§3, п.1, 2.

Методом разделения переменных можно получить решения указанных задач лишь в достаточно простых областях.

1. Решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге $0 \le r \le a$ методом разделения переменных.

Решение. Задачу естественно решать в полярных координатах r, φ. Надо найти функцию $u(r,\varphi)$, гармоническую в круге $0 \le r < a$, $0 \le \varphi < 2\pi$ и непрерывно примыкающую к данным на границе :

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0\,,\ 0 \le r < a\,,\ 0 \le \varphi < 2\pi\,;$$

$$u(a, \varphi) = f(\varphi)\,,\ 0 \le \varphi < 2\pi\,.$$

Будем считать, что f — непрерывная функция на окружности $r = a\,,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$ (следовательно, $f(0) = f(2\pi)$). Удобно полагать, что переменная φ принимает все действительные значения, и тогда из однозначности функции u для всех φ $u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi)$, а $f(\varphi)$ должна быть периодически продолжена на $-\infty < \varphi < +\infty$ с периодом 2π.

Найдём сначала нетривиальные частные решения уравнения Лапласа в круге вида $u(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$. Подставьте это произведение в уравнение и разделите его на $\dfrac{R(r) \cdot \Phi(\varphi)}{r^2}$. Проведите разделение переменных. Вы должны получить две задачи для отличных от тождественного нуля функций $\Phi(\varphi)$ и $R(r)$:

$$\Phi''_{\varphi\varphi} + \lambda \cdot \Phi = 0\,; \qquad\qquad r \cdot \frac{d}{dr}\left(r \cdot \frac{dR}{dr}\right) = \lambda \cdot R,$$

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi),\ -\infty < \varphi < +\infty\,; \qquad 0 \le r < a\,;$$

с подлежащим определению параметром λ.

Запишите уравнение для R в виде линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Как называется это уравнение? Заменой $R = R(r(p))$ независимой переменной $r \ge 0$ приведите его к уравнению с постоянными коэффициентами. Запишите линейно независимые решения в случаях $\lambda = 0$ и $\lambda > 0$ (другие λ нам не понадобятся). Вернитесь к прежней независимой переменной r. Вы должны получить при $\lambda = 0$ $R(r) = A_0 = const \ne 0$ и $R(r) = \ln r$, а при $\lambda > 0$ $R(r) = r^{\sqrt{\lambda}}$ и $R(r) = r^{-\sqrt{\lambda}}$.

Вспомните, что $u(r,\varphi)$ должна быть непрерывной в круге; какие полученные частные решения $R(r)$ надо отбросить?

Существуют ли при $\lambda < 0$ периодические решения уравнения для Φ? При $\lambda \ge 0$ общее решение этого уравнения имеет вид $\Phi(\varphi) = A\cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + B\sin(\sqrt{\lambda}\varphi)$, а условие периодичности даёт $\sqrt{\lambda} = n = 0,1,2,\ldots$. Итак, при каждом указанном n $\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$ — искомые решения.

Теперь

$u_n(r,\varphi) = r^n \cdot (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ — частные решения уравнения Лапласа в круге, а в силу линейности уравнения

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cdot (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

— его общее решение. Для нахождения решения исходной задачи Дирихле подставьте полученный ряд в краевое условие и разложите $f(\varphi)$ в ряд Фурье по системе синусов и косинусов.

Ответ:

$$u(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cdot (\alpha_n \cdot \cos n\varphi + \beta_n \cdot \sin n\varphi),$$ где

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\,d\xi, \qquad \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\cos n\xi\, d\xi,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\sin n\xi\, d\xi.$$

Что требуется обосновать в этом формально полученном ответе? Можно ли считать f кусочно непрерывной на окружности в этой задаче?

2. Получите решение предыдущей задачи в виде интеграла Пуассона.

Указание. Подставьте выражения для α_n и β_n в ряд, дающий решение предыдущей задачи. Поменяйте порядок суммирования и интегрирования. Вы должны получить

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cdot\cos n(\varphi-\xi)\right\}d\xi .$$

Для преобразования выражения в фигурных скобках вспомните, что $\cos n(\varphi-\xi)=\frac{1}{2}\left(\exp\{in(\varphi-\xi)\}+\exp\{-in(\varphi-\xi)\}\right)$ (i — мнимая единица); учтите условие $0<\frac{r}{a}<1$, записывая суммы членов двух геометрических прогрессий со знаменателями $\frac{r}{a}\cdot\exp\{\pm in(\varphi-\xi)\}$. В результате вместо ряда Фурье решение $u(r,\varphi)$ должно получиться в виде интеграла; он называется интегралом Пуассона. Что является обоснованием возможности изменения порядка суммирования и интегрирования?

3. Решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа вне круга методом разделения переменных. (Какому условию должна подчиняться функция $u(r,\varphi)$ при $r\to\infty$? Какие решения $R(r)$ надо сохранить, а какие отбросить?)

4. Решите задачу Неймана для уравнения Лапласа в круге методом разделения переменных. (Все ли коэффициенты A_n , B_n в общем решении можно определить из краевого условия?)

5. Решите задачу Неймана для уравнения Лапласа вне круга методом разделения переменных.

6. Разрешима ли задача для функции $u(r,\varphi)$:

$$\Delta u = 0 \quad , \quad 0 \le r < a \quad , \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad ,$$

r , φ — полярные координаты на плоскости;

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 1 \quad , \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad ?$$

7. Решите задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге $0 \le r \le 1$ с заданными краевыми условиями: $u|_{r=1} = \sin 3\varphi$; $u|_{r=1} = \sin^2 \varphi$; $u|_{r=1} = \cos^2 \varphi$.

8. Решите задачи Неймана для уравнения Лапласа в круге $0 \le r \le 1$ с заданными краевыми условиями:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = \sin\varphi \quad ; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = \sin\varphi + \cos\varphi \quad ; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = \cos^2 \varphi \quad .$$

9. Решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа вне круга $0 \le r \le 1$ с краевым условием $u|_{r=1} = \cos\varphi$.

10. Решите задачу Неймана для уравнения Лапласа вне круга $0 \le r \le 1$ с краевым условием $\left.\dfrac{\partial u}{\partial(-r)}\right|_{r=1} = \cos\varphi$.

11. Решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа в кольце $0 < a \le r \le b$.

Указание. Задачу естественно решать в полярных координатах r , φ. Надо найти функцию $u(r,\varphi)$, гармоническую в кольце $0 < a < r < b \, , 0 \le \varphi < 2\pi$ и непрерывно примыкающую к данным на обеих окружностях:

$$\Delta u = 0,\ a < r < b,\ 0 \le \varphi < 2\pi;$$
$$u(a,\varphi) = f_1(\varphi),\ 0 \le \varphi < 2\pi;$$
$$u(b,\varphi) = f_2(\varphi),\ 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Будем считать, что непрерывные (или кусочно непрерывные) функции f_1, f_2 периодически продолжены на $-\infty < \varphi < +\infty$, и $u(r,\varphi) = u(r,\varphi + 2\pi)$ для всех φ. Разделяя переменные, снова получим две задачи для определения функций $\Phi(\varphi)$ и $R(r)$; отличаются ли они от случая, когда областью был круг ? Какие решения $R(r)$ теперь следует использовать? Запишите все частные решения уравнения Лапласа вида $R \cdot \Phi$ в кольце и его общее решение. Для нахождения решения исходной задачи Дирихле подставьте полученный ряд в краевые условия и разложите $f_1(\varphi)$, $f_2(\varphi)$ в ряды Фурье по системе синусов и косинусов. Получите пары линейных алгебраических уравнений для отыскания всех коэффициентов ряда.

12. Найдите функцию $u(r,\varphi)$, гармоническую в кольце $0 < a < r < b$ и непрерывно примыкающую к краевым условиям $u\big|_{r=a} = 1 + \cos^2\varphi$, $u\big|_{r=b} = \sin^2\varphi$.

13. Решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круговом секторе:

$$\Delta u = 0,\ 0 < r < a,\ 0 < \varphi < \alpha < 2\pi;$$
$$u(r,0) = 0,\ u(r,\alpha) = 0,\ 0 \le r \le a;$$
$$u(a,\varphi) = f(\varphi),\ 0 < \varphi < \alpha.$$

Указание. Для решения этой задачи разделите переменные и получите задачу Штурма-Лиувилля для определения $\Phi(\varphi)$ на отрезке $0 \le \varphi \le \alpha$ и уравнение для $R(r)$. Отберите нужные решения $R(r)$. Запишите все частные решения уравнения Лапласа вида $R \cdot \Phi$ в секторе и его общее решение. Разложите $f(\varphi)$ в ряд

Фурье на $0<\varphi<\alpha$ по собственным функциям полученной задачи Штурма-Лиувилля и постройте решение исходной задачи Дирихле в виде ряда.

14.

$$\Delta u=0\,,\,0<r<2\,,\,0<\varphi<1\,;$$
$$u(r,0)=0\,,\,u(r,1)=0\,,\,0\le r\le 2\,;$$
$$u(2,\varphi)=\sin(3\pi\varphi)\,,\,0<\varphi<1\,.$$

15. Решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа в кольцевом секторе:

$$\Delta u=0\,,\,0<a<r<b\,,\,0<\varphi<\alpha\,;$$
$$u\big|_{\varphi=0}=0\,,\;u\big|_{\varphi=\alpha}=0\,,\,a\le r\le b\,;$$
$$u\big|_{r=a}=f_1(\varphi)\,,\;u\big|_{r=b}=f_2(\varphi)\,,\,0<\varphi<\alpha\,.$$

16.

$$\Delta u=0\,,\,2<r<3\,,\,0<\varphi<2\,;$$
$$u\big|_{\varphi=0}=0\,,\;u\big|_{\varphi=2}=0\,,\,2\le r\le 3\,;$$
$$u\big|_{r=2}=\sin(\pi\varphi)\,,\;u\big|_{r=3}=\sin\left(\frac{3\pi\varphi}{2}\right),\,0<\varphi<2\,.$$

17. Решите задачу Дирихле для уравнения Пуассона в круге $0\le r\le a$:

$$\Delta u=\sin\varphi\,,\,0\le r<a\,,\,0\le\varphi<2\pi\,;$$
$$u(a,\varphi)=a^2\cdot\sin 2\varphi\,,\,0\le\varphi<2\pi\,.$$

Указание. Для решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в области D с границей S

$$\Delta u=-F \quad \text{в} \quad D\,;$$
$$u\big|_S=f$$

надо найти какое-нибудь частное решение U этого неоднородного уравнения в D, а затем сделать замену искомой функции: $u = v + U$. Если удаётся подобрать U, то для новой неизвестной функции v получим задачу

$$\Delta v = 0 \quad \text{в} \quad D;$$

$$v\big|_S = (u - U)\big|_S = f - U\big|_S .$$

Частное решение уравнения $r \cdot \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = r^2 \cdot \sin\varphi$ можно искать в виде $A r^2 \sin\varphi$, $A = const$. Подставьте это выражение в уравнение и определите постоянную A. Запишите задачу для новой функции v и решите её. Ответ: $u(r,\varphi) = \dfrac{r(r-a)}{3}\sin\varphi + r^2 \sin 2\varphi$.

Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в более общих случаях обычно записывают с помощью функции Грина для оператора Лапласа в заданной области.

18.

$$\Delta u = 1,\ 0 < a < r < b,\ 0 \le \varphi < 2\pi;$$

$$u(a,\varphi) = a^2 \sin\varphi,\ 0 \le \varphi < 2\pi;$$

$$u(b,\varphi) = b^2 \cos\varphi,\ 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Указание: ищите частное решение вида $U(r,\varphi) = A r^2$, $A = const$.

19. Решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа относительно $u(x, y)$ в полуполосе:

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 < x < \infty,\ 0 < y < a;$$

$u(0, y) = f(y)$, $f -$ непрерывная функция на $0 \le y \le a$;

$$u(x,0)=f(0)=const\,,\ 0\le x<\infty\,;$$
$$u(x,a)=f(a)=const\,,\ 0\le x<\infty\,;$$
$$|u(x,y)|<const\,.$$

Решение. Задачу естественно решать в декартовых координатах x, y. Заметим сначала , что функция $U(x,y)=Ay+B$ гармонична , и выберем коэффициенты A, B из краевых условий: $U=\dfrac{f(a)-f(0)}{a}\cdot y+f(0)$. Положим $u=v+U$ и обозначим через $g(y)$ разность $f-U$. Тогда для новой неизвестной функции v получим задачу

$$\Delta v=0\,,0<x<\infty\,,0<y<a\,;\quad |v(x,y)|<const\,;$$
$$v(0,y)=(u-U)\big|_{x=0}=g(y)\,,\ 0\le y\le a\,;$$
$$v(x,0)=0\,,\ 0\le x<\infty\,;$$
$$v(x,a)=0\,,\ 0\le x<\infty\,.$$

Найдём нетривиальные частные решения уравнения Лапласа в полуполосе вида $v(x,y)=X(x)\cdot Y(y)$, которые удовлетворяют краевым условиям при $y=0$ и $y=a$.

Подставьте это произведение в уравнение и в указанные краевые условия и разделите уравнение на $X(x)\cdot Y(y)$. Проведите разделение переменных . Вы должны получить две задачи для отличных от тождественного нуля функций $X(x)$ и $Y(y)$:

$$X''_{xx}-\lambda X=0\,,0<x<\infty\,,\qquad\qquad Y''_{yy}+\lambda Y=0\,,0<y<a\,;$$
$$|X(x)|<const\,;\qquad\qquad Y(0)=0\,,Y(a)=0\,.$$

Найдите собственные функции задачи Штурма-Лиувилля для Y и отвечающие её собственным значениям ограниченные решения уравнения для X. При каждом $n=1,2,\ldots$ запишите полученные $X_n(x)\cdot Y_n(y)$ и общее решение уравнения $\Delta v=0$ в полуполосе вида $v = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot X_n(x) \cdot Y_n(y)$. Остаётся найти коэффициенты A_n из последнего краевого условия при $x = 0$; для этого разложите $g(y)$ в ряд Фурье по системе $\{Y_n\}$ на отрезке $0 \le y \le a$. Вернитесь к прежней искомой функции $u(x, y)$ и запишите окончательный ответ.

20. Решите задачу с непрерывным краевым условием на всей границе прямоугольника:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 < x < a,\ 0 < y < b;$$
$$u\big|_{y=0} = f_1(x),\ 0 \le x \le a;$$
$$u\big|_{x=a} = f_2(y),\ 0 \le y \le b;$$
$$u\big|_{y=b} = f_3(x),\ 0 \le x \le a;$$
$$u\big|_{x=0} = f_4(y),\ 0 \le y \le b.$$

Решение. Из требования непрерывности краевого условия имеем:
$$f_1(0) = f_4(0),\ f_1(a) = f_2(0),\ f_2(b) = f_3(a),\ f_3(0) = f_4(b).$$
Для упрощения задачи сначала сделаем замену искомой функции $u = v + U$ так, чтобы новая неизвестная функция v была гармонична и обращалась в нуль во всех вершинах прямоугольника. Функцию U надо подобрать из соображений её простоты. Выберите $U(x, y) = A + Bx + Cy + Dxy$ (проверьте её гармоничность!) и найдите такие коэффициенты A, B, C, D, чтобы в задаче

$$v_{xx}+v_{yy}=0\,,\, 0<x<a\,,\, 0<y<b\,;$$
$$v\big|_{y=0}=\varphi_1(x)=f_1(x)-U(x,0)\,,\, 0\le x\le a\,;$$
$$v\big|_{x=a}=\varphi_2(y)=f_2(y)-U(a,y)\,,\, 0\le y\le b\,;$$
$$v\big|_{y=b}=\varphi_3(x)=f_3(x)-U(x,b)\,,\, 0\le x\le a\,;$$
$$v\big|_{x=0}=\varphi_4(y)=f_4(y)-U(0,y)\,,\, 0\le y\le b$$

краевые условия во всех вершинах обратились в нуль. Теперь задачу для v можно разбить на более простые:

$v=v_1+v_2+v_3+v_4$, где

$$\Delta v_1=0\,;\qquad \Delta v_2=0\,;$$
$$v_1\big|_{y=0}=\varphi_1(x);\qquad v_2\big|_{y=0}=0\,;$$
$$v_1\big|_{x=a}=0\,;\qquad v_2\big|_{x=a}=\varphi_2(y);$$
$$v_1\big|_{y=b}=0\,;\qquad v_2\big|_{y=b}=0\,;$$
$$v_1\big|_{x=0}=0\,;\qquad v_2\big|_{x=0}=0\,;$$

$$\Delta v_3=0\,;\qquad \Delta v_4=0\,;$$
$$v_3\big|_{y=0}=0\,;\qquad v_4\big|_{y=0}=0\,;$$
$$v_3\big|_{x=a}=0\,;\qquad v_4\big|_{x=a}=0\,;$$
$$v_3\big|_{y=b}=\varphi_3(X);\qquad v_4\big|_{y=b}=0\,;$$
$$v_3\big|_{x=0}=0\,;\qquad v_4\big|_{x=0}=\varphi_4(y).$$

Задачу для v_1 будем решать методом разделения переменных. Найдём нетривиальные частные решения уравнения Лапласа в прямоугольнике вида $X(x)\cdot Y(y)$, которые удовлетворяют трём нулевым краевым условиям. Подставьте это произведение в уравнение и в указанные краевые условия и разделите уравнение на $X(x)\cdot Y(y)$. Проведите разделение переменных. Вы должны получить две задачи:

$$X''_{xx} + \lambda X = 0\,,\, 0 < x < a\,; \qquad Y''_{yy} - \lambda Y = 0\,,\, 0 < y < b\,;$$
$$X(0) = 0\,,\, X(a) = 0\,; \qquad Y(b) = 0.$$

Решите задачу Штурма-Лиувилля на отрезке $0 \le x \le a$ и для каждого её собственного значения найдите решение второй задачи (с точностью до постоянного множителя); в качестве фундаментальной системы решений уравнения для Y удобно

выбрать $sh\left(\sqrt{\lambda}(b-y)\right), ch\left(\sqrt{\lambda}(b-y)\right)$. При каждом $n = 1\,,\,2\,,...$ запишите полученные $X_n(x)\cdot Y_n(y)$ и общее решение уравнения $\Delta v_1 = 0$ в прямоугольнике вида $v_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \cdot X_n(x)\cdot Y_n(y)$. Остаётся найти коэффициенты A_n из последнего краевого условия при $y = 0$; для этого разложите $\varphi_1(x)$ в ряд Фурье по системе $\{X_n\}$ на отрезке $0 \le x \le a$.

Задачи для $v_2\,,\,v_3\,,\,v_4$ решаются аналогично. Но в силу очевидной симметрии их решения можно записать немедленно, глядя на решение v_1. Запишите решения $v_2\,,\,v_3\,,\,v_4$ и функцию v. Вернитесь к прежней искомой функции $u(x,y)$ и запишите окончательный ответ.

21.

$$\Delta u = 0\,, 0 < x < a\,, 0 < y < b\,;$$

$$u\big|_{y=0} = \sin\frac{\pi x}{a}\,, 0 \le x \le a\,;$$

$$u\big|_{x=a} = 0\,, 0 \le y \le b\,;$$

$$u\big|_{y=b} = 0\,, 0 \le x \le a\,;$$

$$u\big|_{x=0} = \sin\frac{\pi y}{b}\,, 0 \le y \le b\,.$$

22.

$$\Delta u = 0\,, 0 < x < a\,, 0 < y < b\,;$$

$$u\big|_{y=0} = \sin\frac{\pi x}{a}\,, 0 \le x \le a\,;$$

$$u\big|_{x=a} = 0\,, 0 \le y \le b\,;$$

$$u\big|_{y=b} = \sin\frac{2\pi x}{a}\,, 0 \le x \le a\,;$$

$$u\big|_{x=0} = 0\,, 0 \le y \le b\,.$$

23. Решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа в области $|x| + |y| < 1$ с условием $u(x, y) = x$ на границе. Пришлось ли применять метод разделения переменных?

Указание. Если поиск решения вызвал трудности, то выполните замену независимых переменных:
$$\begin{cases} \xi = \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{1}{2} \\ \eta = \dfrac{y-x}{2} + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Запишите уравнение и краевые условия в переменных $\xi\,, \eta$. Найдите решение вида $U(\xi, \eta) = A + B\,\xi + C\,\eta + D\,\xi\,\eta$ и вернитесь к прежним независимым переменным. Можно ли было сразу найти решение задачи?

24. Решите задачу Неймана для уравнения Лапласа в области $x>0$, $y>0$ с условиями $\left.\dfrac{\partial u}{\partial(-x)}\right|_{x=0}=-1$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial(-y)}\right|_{y=0}=1$ на границе. Является ли заданная область внешностью ограниченной области? Каково поведение решения на бесконечности?

25. Решите смешанную краевую задачу :

$$\Delta u=0,\ 0<x<\pi,\ 0<y<\pi;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=\sin 2x,\ 0<x<\pi;$$

$$\left.u\right|_{x=\pi}=\cos 2y,\ 0\le y\le\pi;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\pi}=\sin 3x,\ 0<x<\pi;$$

$$\left.u\right|_{x=0}=0,\ 0\le y\le\pi.$$

26.

$$\Delta u=\sin 2x,\ 0<x<\frac{\pi}{2},\ 0<y<\infty;$$

$$\left.u\right|_{x=0}=0,\ 0\le y<\infty;$$

$$\left.u\right|_{y=0}=\sin 4x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2},$$

$$\left.u\right|_{x=\frac{\pi}{2}}=0,\ 0\le y<\infty.$$

27.

$$\Delta u = \sin\frac{5\pi x}{a}\cdot\sin\frac{6\pi y}{b},\ 0<x<a,\ 0<y<b;$$

$$u\big|_{y=0} = \sin\frac{\pi x}{a},\ 0\le x\le a;$$

$$u\big|_{x=a} = \sin\frac{2\pi y}{b},\ 0\le y\le b;$$

$$u\big|_{y=b} = \sin\frac{3\pi x}{a},\ 0\le x\le a;$$

$$u\big|_{x=0} = \sin\frac{4\pi y}{b},\ 0\le y\le b.$$

Тема 8.

Решение задач Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона методом функций Грина.

Литература: [1], гл. IV, § 2, п. 1, 2; гл. IV, § 4, п. 1-4.

1. Пусть Ω – ограниченная область в R^3, границей которой является кусочно гладкая замкнутая поверхность S; Q – точка с координатами $\{x_0, y_0, z_0\}$ внутри области Ω, P – точка замкнутой области $\overline{\Omega}$ с координатами $\{x, y, z\}$, r_{PQ} – расстояние между этими точками. Докажите, что значение $u(Q)$ произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функции $u(x, y, z)$ представимо в виде

$$u(Q)=\iint_S\left(G(P,Q)\cdot\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\cdot\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_P}\right)\cdot dS_P-$$
$$-\iiint_\Omega G(P,Q)\cdot\Delta u(P)\cdot dxdydz,$$

где $G(P,Q)=\dfrac{1}{4\pi r_{PQ}}+v(P)$, $v(P)$ – произвольная гармоническая в Ω функция, а $\dfrac{\partial}{\partial n_P}$ означает производную по внешней нормали в точке $P\in S$.

Указание. Примените третью (основную) формулу Грина для функции u и вторую формулу Грина для функций u и v.

2. Пусть D – ограниченная область в R^2, границей которой является кусочно гладкая замкнутая кривая γ; Q – точка с координатами $\{x_0\,,\,y_0\}$ внутри области D, P – точка замкнутой области $\overline{D}$ с координатами $\{x\,,\,y\}$, r_{PQ} – расстояние между этими точками. Докажите, что значение $u(Q)$ произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функции $u(x\,,\,y)$ представимо в виде

$$u(Q)=\int_\gamma\left(G(P,Q)\cdot\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\cdot\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_P}\right)\cdot d\gamma_P-$$
$$-\iint_D G(P,Q)\cdot\Delta u(P)\cdot dxdy,$$

где $G(P,Q)=\dfrac{1}{2\pi}\ln\left(\dfrac{1}{r_{PQ}}\right)+v(P)$, $v(P)$ – произвольная гармоническая в D функция, а $\dfrac{\partial}{\partial n_P}$ означает производную по внешней нормали в точке $P\in\gamma$.

3. Получите в точке $Q \in \Omega \subset R^3$ (в точке $Q \in D \subset R^2$) интегральное представление решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta u(P) = -F(P) \ \ \text{в} \ \ \Omega; \\ u\big|_{P \in S} = f(P); \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u(P) = -F(P) \ \ \text{в} \ \ D; \\ u\big|_{P \in \gamma} = f(P), \end{cases}$$

где заданная функция F непрерывна в $\overline{\Omega}$ (соответственно – в $\overline{D}$), а заданная функция f непрерывна на границе области.

Указание. Выберите функцию $v(P)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta v(P) = 0 \ \ \text{в} \ \ \Omega; \\ v\big|_{P \in S} = -\dfrac{1}{4\pi r_{PQ}}; \end{cases} \qquad \text{либо} \qquad \begin{cases} \Delta v(P) = 0 \ \ \text{в} \ \ D; \\ v\big|_{P \in \gamma} = -\dfrac{1}{2\pi} \ln\left(\dfrac{1}{r_{PQ}}\right). \end{cases}$$

Это значит, что $v = v(P,Q)$, где Q – параметр, и определенная в задачах 1, 2 функция G удовлетворяет условию $G(P,Q) = 0$, когда точка P принадлежит границе области.

Чем определяется сложность построения решения задачи Дирихле: видом заданных функций F и f или сложностью геометрической формы области?

Замечание. Полученная функция G называется функцией Грина задачи Дирихле. Возможность ввести функцию Грина в задаче Дирихле объясняется тем, что $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи

$$\Delta u = \lambda \cdot u \ \ \text{в заданной области;}$$
$$u = 0 \ \ \text{на границе области,}$$

т.е. однородная краевая задача

$$\Delta u = 0 \ \ \text{в заданной области;}$$

$$u = 0 \quad \text{на границе области}$$

имеет только тривиальное решение.

4. Дайте физическую интерпретацию функции Грина задачи Дирихле и опишите метод её построения.

Решение. Функция Грина задачи Дирихле $G(P,Q)$ допускает различные физические интерпретации. Мы примем электростатическую интерпретацию. Пусть поверхность S, ограничивающая область $\Omega \subset R^3$ сделана из идеального проводника и заземлена. Поместим в точке Q внутри Ω электрический заряд величины $\frac{1}{4\pi}$. Этот заряд индуцирует распределение зарядов на S. Поэтому потенциал электростатического поля в области Ω равен сумме потенциала $\frac{1}{4\pi r_{PQ}}$ поля точечного заряда и потенциала $v(P,Q)$ поля индуцированных зарядов. Эта сумма и равна $G(P,Q)$.

Если мысленно убрать индуцированные на S заряды, то для сохранения прежнего потенциала G в области Ω придется разместить некоторые точечные заряды вне поверхности S, которые в Ω создадут поле с потенциалом v. Эти заряды являются зеркальными относительно S изображениями заряда, помещенного в точку Q. Такой прием позволяет для областей простой геометрической формы найти $v(P,Q)$ и построить функцию Грина.

Вспомните, какова физическая интерпретация фундаментального решения уравнения Лапласа на плоскости (см. задачу 16 темы 6) и опишите метод зеркальных изображений для построения функции Грина задачи Дирихле в $D \subset R^2$.

5. Методом зеркальных изображений найдите функцию Грина задачи Дирихле в полупространстве: $\Omega = \{y > 0\} \subset R^3$. Запишите интегральное представление решения этой задачи для уравнения Лапласа.

Решение.

$$\begin{cases} \Delta u(x, y, z) = 0\,,\ -\infty < x < +\infty\,,\ y > 0\,,\ -\infty < z < +\infty\,; \\ \quad u\big|_{y=0} = f(x, z)\,; \\ \textit{и равномерно стремится к } 0 \\ \textit{при } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to \infty\,. \end{cases}$$

Поскольку Ω – неограниченная область, то от функции Грина надо потребовать равномерного её стремления к нулю при $P \to \infty$.

Заряд величины $\dfrac{1}{4\pi}$, помещенный в точке $Q = \{x_0\,,\ y_0\,,\ z_0\}$, создал бы в точке $P = \{x\,,\ y\,,\ z\} \in \Omega$ потенциал $\dfrac{1}{4\pi r_{PQ}}$, если бы не было границы $S = \{y = 0\}$, на которой индуцируются заряды. Заменим эти индуцированные на S заряды на зеркальное изображение заряда, помещенного в точке Q; для этого надо в точке $T = \{x_0\,, -y_0\,,\ z_0\}$ поместить заряд величины $-\dfrac{1}{4\pi}$.

$$G(P, Q) = \frac{1}{4\pi r_{PQ}} - \frac{1}{4\pi r_{PT}}$$. Для получения решения

$u(Q)$ найдем

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n_P}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial G}{\partial(-y)}\right|_{y=0} = \frac{-y_0}{2\pi \cdot \left((x - x_0)^2 + y_0^2 + (z - z_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Получили интегральное представление решения:

$$u(Q)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{y_0}{\left((x-x_0)^2+y_0^2+(z-z_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}f(x,z)dxdz \quad -$$

интеграл Пуассона для полупространства.

Найдите функцию Грина задачи Дирихле и опишите дальнейшую процедуру построения решения этой задачи для уравнения Пуассона в следующих четырех областях пространства:

6. $y>0,\quad z>0.$

7. $x>0,\quad y>0,\quad z>0.$

8. $0<x<1, 0<y<1, 0<z<1.$

9. $x^2+y^2+z^2<1.$

10. Методом зеркальных изображений найдите функцию Грина задачи Дирихле в полуплоскости: $D=\{y>0\}\subset R^2$. Запишите интегральное представление решения этой задачи для уравнения Лапласа. Получите этот же результат из интеграла Пуассона для полупространства, считая что в задаче 5 f зависит лишь от одной переменной x.

Найдите функцию Грина задачи Дирихле и опишите дальнейшую процедуру построения решения этой задачи для уравнения Пуассона в следующих четырех областях плоскости:

11. $x>0, y>0.$

12. $0<x<1, 0<y<1.$

13. $x^2+y^2<1.$

14. $x^2+y^2<1, y>0.$

15. Запишите интегральное представление решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в круге $0\le r\le a$.

Сравните полученное решение с решением задачи 2 темы 7.

Постройте решение задачи 17 темы 7 из полученного интегрального представления.

16. Пусть Ω – область в R^3 с границей S, $Q\{x_0, y_0, z_0\}$ – произвольная фиксированная точка внутри Ω, $P\{x, y, z\}$ – точка замкнутой области $\overline{\Omega}$. Обозначим через $\delta(P, Q) \equiv \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ δ – функцию, сосредоточенную в точке Q. Применив вторую формулу Грина к решениям $u(P)$ и $G(P, Q)$ двух задач

$$\begin{cases} \Delta u(P) = -F(P) \quad в \quad \Omega; \\ u|_{P\in S} = f(P); \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta_P G(P, Q) = -\delta(P, Q) \quad в \quad \Omega; \\ G(P, Q)|_{P\in S} = 0, \end{cases}$$

найдите $u(Q)$.

Тема 9.

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом конформных отображений.

Литература: [1], гл. IV, §1, п.5, 6; [2], гл.7, §1, п.1-4; гл.6, §1, п.1-4; гл.6, §2; гл.6, §3; гл.3, §1, п.3, 4.

1. Пусть z и w — комплексные переменные, C_z и C_w — соответствующие комплексные плоскости. Среди следующих функций $w = \varphi(z)$ найдите те, которые осуществляют конформные отображения. Какие области плоскости C_z будут ими конформно отображены на области плоскости C_w? Дайте геометрическое описание действия этих отображений.

$w_1 = \dfrac{z-q}{z-\bar{q}}$, где q – комплексное число; $w_2 = \dfrac{z-q}{1-\bar{q}\cdot z}$;

$w_3 = \bar{z}$; $w_4 = z^n \quad (n = 2, 3, \ldots)$; $w_5 = e^z$; $w_6 = \sin z$;

$w_7 = \cos z$; $w_8 = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

2. Любые ли две односвязные области можно конформно отобразить друг на друга?

Указание. Ответ на вопрос о возможности конформно отобразить заданную область D_1 на заданную область D_2 в случае односвязных областей даётся теоремой Римана:

> Всякую односвязную область D, граница которой состоит более чем из одной точки, можно конформно отобразить на внутренность единичного круга.

Полная формулировка этой теоремы такова:

> Каковы бы ни были две односвязные области D_1 и D_2 расширенных комплексных плоскостей $\overline{C}_z$, $\overline{C}_w$, отличные от $\overline{C}_z$, $\overline{C}_w$ и от $\overline{C}_z$, $\overline{C}_w$ с какой-либо исключенной точкой , найдется бесконечное число аналитических однолистных в D_1 функций, каждая из которых осуществляет конформное отображение D_1 на D_2. При этом для любой пары точек $q_1 \in D_1 \ (q_1 \neq \infty)$ и $q_2 \in D_2$ и для любого числа α, $0 \le \alpha \le 2\pi$, найдется единственная функция $w = \varphi(z)$ из этого класса, для которой $\varphi(q_1) = q_2$, $\arg \varphi'(q_1) = \alpha$.

Являются ли односвязными областями круг, квадрат, полуплоскость, кольцо? Каков геометрический смысл задания $\arg\varphi'$ в точке $z = q_1$?

3. Пусть D_1 – односвязная область на плоскости, граница которой состоит более чем из одной точки. Опишите процедуру построения решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в D_1 методом конформных отображений.

В сложность какой задачи переходит сложность задачи Дирихле? Чем определяется сложность задачи Дирихле: видом заданной функции f в краевом условии или геометрической формой области D_1?

Указание. Пусть $z = x + i\,y$. В области D_1 изменения действительных переменных x, y введём невырожденную замену независимых переменных действительной функции $u(x, y)$: $\begin{cases}\xi = \xi(x, y)\\ \eta = \eta(x, y)\end{cases}$. Эту замену будем интерпретировать как задание одной функции комплексной переменной: $w = \varphi(z) = \xi(x, y) + i\,\eta(x, y)$. При указанной замене переменных функция $u(x, y)$ превратится в функцию $U(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$. Если $u(x, y)$ гармонична в D_1, то каким должно быть отображение φ, чтобы и функция $U(\xi, \eta)$ была гармонической?

Предположим, что в области D_1 с границей γ_1 поставлена задача Дирихле для уравнения Лапласа относительно $u(x, y)$:

$$\Delta u = 0 \quad в \quad D_1;$$

$$u\big|_{\gamma_1} = f.$$

Выполнив указанную замену переменных, получим для $U(\xi,\eta)$ задачу в области D_2 с границей γ_2:

$$\Delta U = 0 \quad в \quad D_2\ ;$$

$$U\big|_{\gamma_2} = g\ ,$$

где D_2 — образ D_1 при отображении φ, а g — результат замены переменных в функции f. Если нам удалось найти значение решения U в одной точке (ξ_0,η_0), то в какой точке области D_1 можно найти значение решения u? Если мы полностью решим задачу в области D_2, то как найти решение задачи в области D_1?

Допустим теперь, что мы сумели построить не одно конформное отображение $w=\varphi(z;q_1)$ области D_1 на D_2, переводящее заданную точку $q_1 = x_0 + i\,y_0$ в заданную точку $q_2 = \xi_0 + i\,\eta_0$, а семейство таких отображений для каждой фиксированной точки $q_1 \in D_1$. Пусть при этом точка $q_2 \in D_2$ одна и та же для всех отображений этого семейства, т.е. мы можем конформно отобразить D_1 на D_2 так, что произвольная точка $q_1 \in D_1$ будет переведена в фиксированную точку $q_2 \in D_2$. Нужно ли тогда для решения задачи Дирихле в D_1 полностью решать задачу в D_2? Как найти $u(x_0,y_0)$ в произвольной точке (x_0,y_0)?

Выберем в качестве области D_2 единичный круг $|w|<1$, а в качестве фиксированной точки q_2 — его центр: $q_2 = 0$. Найдем значение $U(0,0)$ решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в центре этого круга. Для этого достаточно написать формулу среднего значения для гармонической функции U. Пусть

$h(w)=U(\xi,\eta)+i\,V(\xi,\eta)$; какова связь свойств аналитичности $h(w)$ и гармоничности $U(\xi,\eta)$ и $V(\xi,\eta)$? Выразите значение аналитической функции $h(w)$ в центре круга по интегральной формуле Коши. Введите в интеграле по окружности γ_2 переменную интегрирования θ — полярный угол. Возьмите действительные части обеих частей равенства. Вы должны получить искомую формулу среднего значения: $U(0,0)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} U\Big|_{|w|=1} d\theta$.

Теперь вспомните, что $U\Big|_{|w|=1}=g(\theta)$ — известная функция.

4. Решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа в области $D_1=\{-\infty<x<+\infty\,,\,y>0\}$.

Решение. Надо найти гармоническую и ограниченную в верхней полуплоскости функцию $u(x,y)$, непрерывно примыкающую к краевому условию $u(x,0)=f(x)$ на границе $\gamma_1=\{y=0\}$. Найдем семейство конформных отображений области $D_1=\{\operatorname{Im} z>0\}$ на область $D_2=\{|w|<1\}$, которые произвольную точку $q_1=x_0+i\,y_0$ переводят в центр круга $q_2=0$. Такие отображения можно искать среди дробно-линейных. (Что является образом окружности при дробно-линейном отображении? Что является образом прямой линии? Что должно быть образом границы γ_1?) Искомое отображение должно иметь вид $w=\varphi(z)=\dfrac{z-q_1}{\dots}$, так как точка q_1 должна перейти в $q_2=0$. Чтобы найти знаменатель дроби, вспомните, как дробно-линейная функция отобразит две точки, симметричные относительно прямой линии; какие две точки называются симметричными относительно окружности? В качестве искомого отображения можно взять $w=\dfrac{z-q_1}{z-\bar{q}_1}$.

Решение задачи Дирихле в центре единичного круга даётся формулой среднего значения: $U(0,0)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(\theta)\,d\,\theta$, где g получается из f в результате замены независимой переменной. Но $u(x_0,y_0)=U(0,0)$, поэтому остаётся вернуться к переменным x, y в последнем интеграле. На окружности $\gamma_2=\{|w|=1\}$ $w=e^{i\theta}=\dfrac{x-q_1}{x-\bar{q}_1}$, поэтому на γ_2 $d\,w=i\,e^{i\theta}d\,\theta=d\left(\dfrac{x-q_1}{x-\bar{q}_1}\right)$.

Отсюда $d\,\theta=\dfrac{2\,y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}\,d\,x$ (проверьте!).

Ответ. Решение исходной задачи в произвольной точке (x_0,y_0) даётся интегралом Пуассона для полуплоскости:

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}\,f(x)\,d\,x\,.$$

5. Решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа в области $D_1=\{\,0\le r<a\,\}$ (r, ψ — полярные координаты).

Решение. Отобразите конформно круг D_1 на единичный круг D_2 так, чтобы произвольная точка $q_1=r_0\,e^{i\psi_0}$ перешла в центр $q_2=0$. Ищите отображение среди дробно -линейных. Найдите точку, симметричную к точке q_1 относительно окружности $\gamma_1=\{|z|=a\}$; что должно быть образом этой точки при искомом отображении? Теперь должно быть ясно, что нужное отображение имеет вид $w=\varphi(z)=k\,\dfrac{z-q_1}{a^2-\bar{q}_1\,z}$, где комплексный коэффициент k надо ещё выбрать. Так как отображение φ переведёт γ_1 в $\gamma_2=\{|w|=1\}$, то $\left|k\,\dfrac{a\,e^{i\psi}-q_1}{a^2-\bar{q}_1\,a\,e^{i\psi}}\right|=\left|\dfrac{k}{a\,e^{i\psi}}\right|\cdot\left|\dfrac{a\,e^{i\psi}-q_1}{a\,e^{-i\psi}-\bar{q}_1}\right|=\dfrac{|k|}{a}=1.$ Значит, $k=a\,e^{i\alpha}$, где α — любое действительное число. (Найдите в точке $z=q_1$ коэффициент растяжения $|\varphi'(q_1)|$ и угол поворота $\arg\varphi'(q_1)$. Что значит задать какое-либо значение α?) Выберите, например, $\alpha=\pi-\psi_0$. Тогда $\varphi(z)=\dfrac{a}{r_0}\cdot\dfrac{z-r_0\,e^{i\psi_0}}{z-\dfrac{a^2}{r_0}\,e^{i\psi_0}}$.

Осталось выразить через заданное краевое условие $u\big|_{\gamma_1}=f(\psi)$ уже известное значение решения $u(r_0,\psi_0)=U\big|_{w=0}=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}g(\theta)d\theta$. На γ_1 отображение φ имеет вид $w\big|_{\gamma_2}=e^{i\theta}=\dfrac{a}{r_0}\cdot\dfrac{a\cdot e^{i\psi}-r_0\cdot e^{i\psi_0}}{a\cdot e^{i\psi}-\dfrac{a^2}{r_0}\cdot e^{i\psi_0}}$. Дифференцируя последнее равенство, найдите $d\theta=\dfrac{a^2-r_0^2}{a^2+r_0^2-2a\,r_0\cos(\psi-\psi_0)}d\psi$. Запишите решение исходной задачи $u(r_0,\psi_0)$ в виде интеграла Пуассона для круга. Сравните ответ с полученным в задаче 2 темы 7 и в задаче 15 темы 8.

6.

$$\Delta v = 0\,, -\infty < x < +\infty\,,\; y > 0\,;$$

$$v(x,0) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\,, & x > 0\,; \\ -\dfrac{\pi}{2}\,, & x < 0\,. \end{cases}$$

Найдите $v(x, y)$. Существует ли $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0,\; y > 0}} v(x, y)$? Найдите аналитическую в области $\operatorname{Re} z > 0$ функцию $h(z)$, $z = x + iy = r \cdot e^{i\psi}$, у которой $\operatorname{Im} h(z) = v(x, y)$. Каково поведение $h(z)$ в окрестности точки $z = 0$?

7.

$$\Delta v = 0\,, 0 < x < +\infty\,, 0 < y < +\infty\,;$$

$$v(x,0) = \frac{\pi}{2}\,,\; x > 0\,;$$

$$v(0, y) = -\frac{\pi}{2}\,,\; y > 0\,.$$

Найдите $v(x, y)$. Существует ли $\lim\limits_{\substack{x \to 0,\; x > 0 \\ y \to 0,\; y > 0}} v(x, y)$? Найдите аналитическую в области $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2}$ функцию $h(z)$, $z = x + iy = r \cdot e^{i\psi}$, у которой $\operatorname{Im} h(z) = v(x, y)$. Каково поведение $h(z)$ в окрестности точки $z = 0$?

8.

$$\Delta u = 0\,, 0 \le r < a\,, 0 \le \psi < 2\pi\,,$$
$$u(a, \psi) = \sin \psi\,, 0 \le \psi \le 2\pi\,.$$

(r , ψ — полярные координаты).

Сравните решение в виде интеграла Пуассона с решением, полученным методом разделения переменных в задаче 1 темы 7.

В следующих девяти задачах найдите конформное отображение заданной области на единичный круг, переводящее произвольную точку q в центр круга. Опишите дальнейшую процедуру построения решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в заданной области.

9.

$0 < r < \infty$, $0 < \alpha < \psi < \beta < 2\pi$ (r, ψ — полярные координаты).

10.

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $y > 0$.

11.

$-\pi < x < 0$, $y > 0$.

12.

$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$, $-\infty < y < +\infty$.

13.

$-\infty < x < +\infty$, $0 < y < \pi$.

14.

$x > 0$, $0 < y < \pi$.

15.

$x^2 + y^2 < 1$, $y > 0$.

16.

$x^2 + y^2 < 1$, $x > 0$, $y > 0$.

17.

$x^2 + y^2 > 1$, $y > 0$.

18. Чем определяется сложность построения функции Грина задачи Дирихле в области $D \subset R^2$?

Чем определяется сложность построения решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в $D \subset R^2$?

Решение. Пусть в двумерной области D с границей γ поставлена задача

$$\Delta u = 0 \quad в \quad D;$$

$$u\big|_{\gamma} = f.$$

Функция Грина $G(P,Q)$ этой задачи зависит от двух точек P и Q области D. Она содержит всю информацию о задаче Дирихле для уравнения Лапласа или для уравнения Пуассона в том смысле, что позволяет записать решение задачи

$$\Delta u = -F \quad в \quad D;$$

$$u\big|_{\gamma} = f$$

в виде

$$u(Q) = \iint\limits_{D} G(P,Q)F(P)\,dD_P - \int\limits_{\gamma} \frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_P} f(P)\,d\gamma_P,$$

где $\vec{n}_P$ — единичная внешняя нормаль к кривой γ в точке P.

Какими требованиями определяется функция Грина? Получите из её определения, что

$$G(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PQ}} + v(P,Q),$$

где r_{PQ} — расстояние между P и Q, а функция v при фиксированной внутри D точке Q как функция координат точки P является решением задачи

$$\Delta_P v = 0 \quad в \quad D;$$

$$v\big|_{P\in\gamma} = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PQ}}.$$

Это даёт один из способов нахождения G: надо решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в той же области, но с краевым условием специального вида. Существенно ли упрощается от этого построение решения задачи для u? Каков смысл функции $\ln \dfrac{1}{r_{PQ}}$?

Другой способ отыскания G в односвязной области D — конформно отобразить D на единичный круг. Пусть точка $Q \in D$ имеет координаты $\{x_0, y_0\}$; ей отвечает точка комплексной плоскости $q = x_0 + i\,y_0$. Если функция $w = \varphi(z;q)$ конформно отображает односвязную область D на $\{|w| < 1\}$ так, что произвольная точка $q \in D$ переводится в центр круга , то

$$G(P,Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\varphi(z;q)|} \quad .$$

Чем сложнее геометрическая форма области D, тем сложнее найти конформное отображение φ, а следовательно, и построить решение исходной задачи.

19. Найдите функцию Грина задачи Дирихле в области $D = \{-\infty < x < +\infty\,,\ y > 0\}$. (Помните, что G зависит от четырёх действительных переменных. В выражение для G не должны входить комплексные переменные.) Найдите производную функции G при $y = 0$ по $(-y)$. Получите интеграл Пуассона для полуплоскости D; сравните с результатом задачи 4. Запишите решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в этой полуплоскости.

20. Найдите функцию Грина задачи Дирихле в области $D = \{0 \le r < a\}$. Найдите производную функции G по r при $r = a$. Получите интеграл Пуассона для круга D; сравните с результатом задачи 5. Запишите решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в этом круге.

21. Найдите функцию Грина задачи Дирихле в области $D=\{x>0\,,\,y>0\}$. Выразите G через координаты точек $P(x,y)$ и $Q(x_0,y_0)$. Опишите дальнейшую процедуру построения решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в области D.

22. Найдите функции Грина задач Дирихле в областях, указанных в пунктах 9 – 17 . Выразите G через модули комплексных выражений, если последующие преобразования кажутся громоздкими. Опишите дальнейшую процедуру построения решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в этих областях.

Дополнение к теме 9.

23. Докажите, что задача конформного отображения односвязной области D на единичный круг и задача Дирихле для уравнения Лапласа в D эквивалентны.

Доказательство. Задача Дирихле уже была сведена к задаче конформного отображения. Остаётся доказать, что если для D известно решение задачи Дирихле (т.е. мы умеем по произвольной заданной на границе γ функции f находить гармоническую в D функцию u), то можно построить конформное отображение области D на $\{|w|<1\}$.

По теореме Римана искомое отображение $w=\varphi(z;q)$, где $\varphi(q,q)=0$, существует. Предположим сначала, что мы знаем это отображение. Рассмотрим функцию $\Phi(z)=\dfrac{\varphi(z;q)}{z-q}$ и доопределим её в точке

$$z=q:\quad \Phi(q)=\lim_{z\to q}\frac{\varphi(z;q)}{z-q}=\varphi'_z(q;q).$$

$\Phi(z)$ аналитична и отлична от нуля всюду в D ($\varphi(z;q)$ равна нулю только при $z=q$,

а $\varphi'_z(z;q)\neq 0$ в силу конформности отображения). Поэтому функция $u(x,y)=\ln|\Phi(z)|$,

$z = x + iy$, гармонична в области D (проверьте!). Её значения на границе γ этой области

$$u_\gamma = \ln\left|\frac{\varphi(z;q)}{z-q}\right|_{z\in\gamma} = \ln\frac{1}{|z-q|}_{z\in\gamma}$$

не зависят от вида функции φ, ибо $|\varphi(z;q)|_{z\in\gamma} = 1$.

На самом деле функция φ нам неизвестна. Но по предположению мы можем по любым заданным граничным значениям гармонической функции $u(x, y)$ однозначно восстановить её значения внутри D, т.е. решить задачу Дирихле. Выберем краевое условие $u\Big|_\gamma = \ln\frac{1}{|z-q|}_{z\in\gamma}$ и найдём решение $u(x, y)$ задачи Дирихле с этим краевым условием. Теперь с помощью условий Коши – Римана найдем в D сопряженную к $u(x, y)$ гармоническую функцию $v(x, y)$; она определится с точностью до постоянного действительного слагаемого α. Таким образом, мы находим функцию $\ln \Phi(z) = u(x, y) + i\,v(x, y) + i\,\alpha$ $\left(u(x, y) = \ln|\Phi(z)|,\ v(x, y) + \alpha = \arg\Phi(z)\right)$. И, наконец, получаем искомое конформное отображение

$$\varphi(z;q) = (z-q)\cdot\Phi(z) = e^{i\alpha}(z-q)\cdot\exp\{u(x, y) + i\,v(x, y)\}.$$

Оно определяется с точностью до поворота на угол α. Этот угол можно выбрать, например, заданием $\arg\varphi'_z(q;q)$.

24. Пусть решение задачи Неймана

$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad D \subset R^2;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_\gamma = g$$

имеет непрерывные частные производные вплоть до границы γ области D. Сведите указанную задачу Неймана к задаче Дирихле для гармонической функции $v(x, y)$, сопряженной к гармонической функции $u(x, y)$.

Указание. Пусть $h(z)=u(x,y)+i\,v(x,y),\quad z=x+i\,y$, – аналитическая функция комплексной переменной z. Комплексные числа n и t задают направления $\vec{n}$ и $\vec{t}$ в точке $(x,y)\in D$. Докажите, что если комплексные числа n и t таковы, что $|n|=|t|=1$ и $t=i\cdot n$, то производные по направлениям $\vec{n}$ и $\vec{t}$ функций u и v связаны соотношениями Коши-Римана $\dfrac{\partial u}{\partial\vec{n}}=\dfrac{\partial v}{\partial\vec{t}},\quad \dfrac{\partial v}{\partial\vec{n}}=-\dfrac{\partial u}{\partial\vec{t}}$. Пусть теперь $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к кривой γ, а $\vec{t}$ – касательный вектор к γ в той же точке. Получите для v граничное условие $v(Q)\Big|_{Q\in\gamma}=f=\int\limits_{Q_0}^{Q}g\cdot d\gamma$, где интеграл берётся вдоль кривой γ от произвольной фиксированной точки $Q_0\in\gamma$ до точки $Q\in\gamma$.

Из тем 7, 8 и 9 видно, что краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона реально удаётся решить аналитическими методами только в областях достаточно простой формы. Но и в них ответ может получаться в виде громоздких выражений, что снижает ценность такого ответа. Важные в практическом отношении задачи решают численно, а рассмотренные здесь аналитические методы применяют для решения упрощённых модельных задач.

Тема 10.

Волновое уравнение. Постановки начально-краевых задач для волнового уравнения и их редукция.

Литература: [1], гл. II, §1, п. 1, 2, 7, 8; гл. II, §3, п. 5.

1. Рассмотрите продольную упругую стационарную деформацию стержня под действием распределенной вдоль стержня силы и выведите уравнение стационарного растяжения стержня.

Запишите постановки краевых задач для этого уравнения со всеми различными комбинациями краевых условий 1-го и 2-го рода на концах стержня.

Решение. Пусть к упругому стержню длиной l приложены внешние силы, вызывающие смещение его частиц в новые положения равновесия. Тогда в стержне возникают внутренние упругие силы между соседними его частицами, которые препятствуют действию внешних сил. Деформация называется упругой, если она исчезает после снятия внешнего воздействия. При равенстве упругих и внешних сил дальнейший процесс деформации прекращается, т.е. деформация становится стационарной – не зависящей от времени. Будем считать, что всякое поперечное сечение покоящегося стержня не меняет своей формы при действии внешних сил, а только сдвигается вдоль стержня – вдоль оси x; такой стержень можно считать одномерным. Закон Гука утверждает, что нормальное напряжение σ (напряжение $\sigma = \dfrac{F_{упр}}{S}$ в поперечном сечении площади S под действием упругой силы $F_{упр}$) пропорционально относительному удлинению стержня: $\sigma = E\dfrac{\Delta l}{l}$. Здесь коэффициент $E > 0$ определяется материалом стержня, а Δl – абсолютное удлинение стержня под действием внешних сил.

Запишите закон Гука не для всего стержня, а лишь для его участка $[x, x + \Delta x]$. Для этого предположите, что в покое (в отсутствии внешних сил) частица стержня имела координату x. Пусть в направлении оси x на стержень действует распределённая вдоль него внешняя сила $F(x)$ с линейной плотностью её распределения $f(x)$. (f — сила, приходящаяся на единицу длины : $f = \dfrac{dF}{dx}$.) Внешняя сила вызовет смещение указанной частицы на некоторую величину $u(x)$. Выделите внутри стержня в отсутствии внешней силы элемент $[x, x + \Delta x]$ и запишите координаты концов этого элемента при её действии. Найдите относительное удлинение выделенного элемента стержня и запишите его, используя теорему Лагранжа для функции $u(x)$ на $[x, x+\Delta x]$. Тогда закон Гука утверждает, что $\sigma(x) = E(x)\cdot u'_x(x+\theta\cdot\Delta x)$, где $0<\theta<1$. Если устремить $\Delta x \to 0$, то $\sigma(x)=E(x)\cdot u'_x(x)$, т.е. сила упругости в точке x равна $F_{упр}(x)=\sigma(x)\cdot S = S\cdot E(x)\cdot u'_x(x)$.

Теперь выделите произвольный промежуток $[x_1, x_2]$. Если состояние стержня стационарно, т.е. процесс растяжения прекратился, то для любого промежутка $[x_1, x_2]$ внутри стержня выполняется баланс сил:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + S\cdot E(x_2)\cdot u'_x(x_2) - S\cdot E(x_1)\cdot u'_x(x_1) = 0;$$

в точке x_2 на выделенный участок $[x_1, x_2]$ действует сила упругости со стороны части стержня $x > x_2$, направленная по оси x, а в точке x_1 — сила упругости со стороны части стержня $x < x_1$, направленная против оси x. Предположите теперь, что $f(x)$ непрерывна, а $u(x)$ дважды непрерывно дифференцируема. Запишите $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$ с помощью теоремы о среднем. Введите обозначение $S\cdot E(x)=k(x)$. Считайте, что стержень однороден, т.е. $E(x)=const$. Разделите уравнение баланса сил на x_2-x_1 и устремите $x_1\to x$, $x_2\to x$. Вы должны получить уравнение продольного стационарного растяжения стержня: $u''_{xx}(x) = -\dfrac{f(x)}{k}, 0<x<l$. Это обыкновенное дифференциальное уравнение является уравнением Пуассона в одномерном случае. Как будет выглядеть это уравнение, если

$E(x) \neq const$, но является непрерывно дифференцируемой функцией (стержень сделан из переменного материала)?

Для вывода краевых условий на правом конце стержня $0 \leq x \leq l$ рассмотрите участок стержня $[l - \Delta x, l]$. Пусть на правый конец стержня действует со стороны внешней опоры сила упругого закрепления. Это значит, что в точке l действует сила, пропорциональная смещению $u(l)$ и направленная против смещения. Запишите для указанного участка баланс трёх сил: внешней распределённой силы $\int\limits_{l-\Delta x}^{l} f(x)dx$, упругой силы $-S \cdot E \cdot u'_x(l - \Delta x)$ со стороны части стержня $x < l - \Delta x$ и силы $-æ \cdot u(l)$ упругого закрепления правого конца. Запишите $\int\limits_{l-\Delta x}^{l} f(x)dx$ с помощью теоремы о среднем и учтите, что при $\xi \in (l - \Delta x, l)$ $f(\xi) \cdot \Delta x \approx F(l)$ в силу определения F и f. Устремите $\Delta x \to 0$.

Разделите уравнение баланса сил на правом конце на $k = S \cdot E$. Вы должны получить краевое условие 3-го рода вида $u'_x(l) + h\,u(l) = g(l)$, где $h = const > 0$, $g(l) = \dfrac{F(l)}{k}$. Как выглядит это условие, если внешней распределенной вдоль стержня силы на правом конце нет? Как оно выглядит, если нет силы упругого закрепления (краевое условие 2-го рода) ? Если нет ни той, ни другой силы (правый конец свободен) ? Рассмотрите краевое условие 1-го рода $u(l) = const$; какую информацию оно содержит? Как записать, что правый конец жёстко закреплён? Проведите аналогичные рассмотрения для левого конца стержня.

2. Однородный вертикальный стержень с закреплёнными концами находится в поле силы тяжести. Объёмная плотность массы стержня равна ρ. Поставьте краевую задачу для стационарного

смещения $u(x)$ точек стержня под действием силы тяжести и найдите $u(x)$ для $0 \le x \le l$.

3. Однородный вертикальный стержень в поле силы тяжести жёстко закреплён верхним концом на держащей его опоре. Нижний конец свободен. Найдите стационарное смещение $u(x)$ точек стержня под действием силы тяжести.

4. Однородный стержень с закреплённым левым концом растягивается силой F, приложенной к правому концу. Распределённой вдоль стержня силы нет. Найдите стационарное смещение $u(x)$.

5. Рассмотрите нестационарное состояние упругого стержня и выведите уравнение его продольных колебаний.

Решение. Пусть $u(x,t)$ — продольное смещение в момент времени t точки, имевшей в состоянии покоя координату x. Тогда $u'_t(x,t)$ — скорость движения в точке x в момент времени t. Если $\rho(x)$ — объёмная плотность массы в точке x (стержень можно считать неоднородным), то $\rho(x)S\,dx$ — масса участка стержня длиной dx. Выберите внутри стержня произвольный участок $[x_1, x_2]$. Изменение количества движения для этого участка в течение промежутка времени $[t_1, t_2]$ (изменение количества движения обусловлено действием внешней силы $F(x,t)$ с линейной плотностью её распределения вдоль стержня $f(x,t)$ и действием сил упругости за указанное время) равно

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[u_t'(x,t_2)-u_t'(x,t_1)\right]\cdot\rho(x)\cdot dx\cdot S=\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}f(x,t)\cdot dx\cdot dt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\left[S\cdot E(x_2)\cdot u_x'(x_2,t)-S\cdot E(x_1)\cdot u_x'(x_1,t)\right]\cdot dt.$$

Предположите, что $f(x,t)$ непрерывна и запишите $\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}f(x,t)\,dx\,dt$ с помощью теоремы о среднем. Предположите существование непрерывных производных u_{xx}'', u_{tt}''. Запишите по теореме о среднем два других интеграла. Разделите равенство на x_2-x_1 и на t_2-t_1. Устремите $x_1\to x$, $x_2\to x$, $t_1\to t$, $t_2\to t$. Вы должны получить $\rho(x)S\,u_{tt}''(x,t)=\left(k(x)u_x'(x,t)\right)_x'+f(x,t)$. Если $k=const$, $\rho=const$, то уравнение можно записать в виде $u_{tt}''=a^2u_{xx}''+\dfrac{f}{\rho S}$, где $a^2=\dfrac{k}{\rho S}>0$. Оно называется волновым уравнением или уравнением колебаний. Во что оно превратится, если u не зависит от времени t?

6. Если величина продольного смещения u зависит от времени, то и краевые условия могут зависеть от времени t: $u(0,t)=\mu(t)$ — известен закон движения левого конца, $u_x'(0,t)=\nu(t)$ — на левом конце известна сила упругости, $u_x'(0,t)-h\,u(0,t)=g(t)$ — условие упругого закрепления левого конца. Запишите аналогичные условия на правом конце стержня. Для всех комбинаций краевых условий 1-го и 2-го рода на концах стержня запишите постановки начально-краевых задач для волнового уравнения. Какой физический смысл имеют величины $u(x,0)$, $u_t'(x,0)$?

7. Пусть функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению $u_{tt}=a^2u_{xx}$ при $0<x<l\,,t>0$ и граничным условиям $u(0\,,t)=0$, $u(l\,,t)=0$ при $t>0$. Достаточно ли этих условий для выделения единственного решения уравнения?

Указание. Рассмотрите однопараметрические семейства функций

$$\left\{u_n(x,t)=\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi na}{l}t\right),n=0\,,1\,,2\,,...\right\},$$

$$\left\{u_n(x\,,t)=\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi na}{l}t\right),n=0\,,1\,,2\,,...\right\}.$$

Если к этому уравнению и указанным граничным условиям добавить начальное условие $u(x\,,0)=\varphi(x)$ при $0\le x\le l$, то позволит ли оно выделить единственное решение?

Указание. Рассмотрите начальное условие $u(x\,,0)=\varphi(x)=\sin\dfrac{\pi}{l}x$.

8. Выведите уравнение малых поперечных колебаний тонкой гибкой струны длиной l.

Указание. Искомая функция $u(x,t)$ — поперечное отклонение струны от горизонтального положения в точке x в момент времени t, которое возникает под действием поперечной внешней силы $F(x,t)$, распределённой вдоль струны с линейной плотностью $f(x,t)$.

Дайте физическую интерпретацию краевых условий 1-го и 2-го рода на концах струны. Запишите постановки начально-краевых задач для уравнения колебаний струны со всеми комбинациями краевых условий 1-го и 2-го рода. Какой физический смысл имеют величины $u(x\,,0)$, $u_t'(x\,,0)$?

Отличается ли построенная модель поперечных колебаний струны от модели продольных колебаний стержня?

9. Сведите поставленные в пунктах 6 и 8 задачи для волнового уравнения с неоднородными граничными условиями к задачам с нулевыми граничными условиями.

Указание. Выполните замену неизвестной функции $u(x,t)=v(x,t)+U(x,t)$; функцию $U(x,t)$ выберите, например, в виде многочлена первой или второй степени относительно x.

10. Если нас интересуют колебания струны только вблизи одного её конца (левого), то в некоторых случаях другой конец струны можно считать бесконечно удалённым. Тогда волновое уравнение мы рассматриваем в области $x>0$. Если нас интересуют колебания струны вдали от обоих её концов, то иногда оба конца можно считать бесконечно удалёнными. В этом случае уравнение действует в области $-\infty<x<+\infty$. Запишите постановки начально-краевых задач на полупрямой и задачи с начальными условиями (задачи Коши) на всей прямой для волнового уравнения.

Тема 11.

Характеристики. Характеристическое уравнение. Построение замены независимых переменных для приведения к канонической форме уравнения с двумя независимыми переменными.

Литература: [1], гл. I, § 1, п. 1, 3.

1. Пусть кривая γ на плоскости x, y задана уравнением $\omega(x,y)=0$, где ω – непрерывно дифференцируемая функция, причем во всех точках этой кривой $\omega_x^2+\omega_y^2\neq 0$. Кривая γ называется характеристикой уравнения $a_{11}\cdot u_{xx}+2\cdot a_{12}\cdot u_{xy}+a_{22}\cdot u_{yy}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0$,

если функция $\omega(x,y)$ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$a_{11}(x,y)\cdot\omega_x^2+2\cdot a_{12}(x,y)\cdot\omega_x\cdot\omega_y+a_{22}(x,y)\cdot\omega_y^2=0 \ .$$

Сколько семейств действительных характеристик имеют уравнения $u_t=a^2\cdot u_{xx}$, $u_{xx}+u_{yy}=0$, $u_{tt}=a^2\cdot u_{xx}$? Найдите эти семейства характеристик.

2. В каждой из областей на плоскости x, y, в которых уравнения 6 – 25 темы 1 сохраняют тип, найдите семейства действительных характеристик данного уравнения, если они имеются.

Указание. Функция $\omega(x,y)$ является частным решением уравнения

$$a_{11}\cdot\omega_x^2+2\cdot a_{12}\cdot\omega_x\cdot\omega_y+a_{22}\cdot\omega_y^2=0$$

тогда и только тогда, когда равенство $\omega(x,y)=const$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11}\cdot(dy)^2-2\cdot a_{12}\cdot dx\cdot dy+a_{22}\cdot(dx)^2=0 \ .$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение называется дифференциальным уравнением характеристик.

Приведение к каноническому виду квадратичной формы Q, отвечающей уравнению в частных производных второго порядка, позволяет записать это уравнение в наиболее простой – канонической – форме в каждой фиксированной точке (x,y). Но оно не даёт способа нахождения переменных $\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$, в которых указанное уравнение будет записано в канонической форме сразу в некоторой области изменения этих независимых переменных. Для уравнений с двумя независимыми переменными (и только для них) такой способ существует; он описан ниже в задачах 3 – 6.

3. Пусть уравнение

$$a_{11}(x,y)\cdot u_{xx}+2\cdot a_{12}(x,y)\cdot u_{xy}+a_{22}(x,y)\cdot u_{yy}+F=0 \ ,$$

в окрестности точки (x, y) имеет гиперболический тип. Пусть в этой окрестности $a_{11}(x, y) \neq 0$. Потребуйте, чтобы замена переменных $\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$ одновременно обращала в нуль коэффициенты при $u_{\xi\xi}$ и $u_{\eta\eta}$. Какими для этого надо выбрать новые переменные ξ, η? Запишите уравнение в новых переменных, разделив его на коэффициент при $u_{\xi\eta}$.

Замечание. В рассматриваемом случае дифференциальное уравнение характеристик имеет два независимых интеграла. Это и позволяет одновременно обратить в нуль коэффициенты при $u_{\xi\xi}$ и $u_{\eta\eta}$. Уравнение в найденных переменных ξ, η называется уравнением гиперболического типа в первой канонической форме.

4. В уравнении гиперболического типа, записанном в предыдущей задаче в первой канонической форме, выполните ещё одну замену переменных:

$$\begin{cases} \tilde{\xi} = \tilde{\xi}(x, y) = \dfrac{\xi + \eta}{2}, \\ \tilde{\eta} = \tilde{\eta}(x, y) = \dfrac{\xi - \eta}{2}. \end{cases}$$

Запишите это уравнение в переменных $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ – вторую каноническую форму уравнения гиперболического типа.

5. Пусть уравнение

$$a_{11}(x, y) \cdot u_{xx} + 2 \cdot a_{12}(x, y) \cdot u_{xy} + a_{22}(x, y) \cdot u_{yy} + F = 0$$

в окрестности точки (x, y) имеет эллиптический тип. Пусть в этой окрестности $a_{11}(x, y) \neq 0$. Выполните замену независимых переменных

$$\begin{cases} \tilde{\xi} = \tilde{\xi}(x, y) = \operatorname{Re} \xi, \\ \tilde{\eta} = \tilde{\eta}(x, y) = \operatorname{Im} \xi, \end{cases}$$

где функция $\xi(x, y)$ определена из следующего условия: $\xi(x, y) = const$ является комплексным интегралом дифференциального уравнения характеристик. Какой из коэффициентов при старших производных обратится при этом в нуль?

Замечание. В рассматриваемом случае дифференциальное уравнение характеристик имеет два комплексно сопряженных интеграла. Уравнение в переменных $\widetilde{\xi}$, $\widetilde{\eta}$ называется уравнением эллиптического типа в канонической форме.

6. Пусть уравнение

$$a_{11}(x,y)\cdot u_{xx}+2\cdot a_{12}(x,y)\cdot u_{xy}+a_{22}(x,y)\cdot u_{yy}+F=0$$

в окрестности точки (x,y) имеет параболический тип. Пусть в этой окрестности $a_{11}(x,y)\neq 0$ и $a_{22}(x,y)\neq 0$. Выполните замену переменных $\begin{cases}\xi=\varphi(x,y),\\ \eta=\psi(x,y),\end{cases}$ где φ и ψ определены из следующих условий: $\varphi(x,y)=const$ является интегралом дифференциального уравнения характеристик, и функции φ и ψ независимы. Запишите уравнение в новых переменных, разделив его на коэффициент при $u_{\eta\eta}$.

Замечание. В рассматриваемом случае дифференциальное уравнение характеристик имеет лишь один интеграл, поэтому функцию ψ можно выбрать произвольной. Указанный выбор переменных ξ, η обращает в нуль коэффициенты при $u_{\xi\xi}$ и $u_{\xi\eta}$. Уравнение в этих переменных называется уравнением параболического типа в канонической форме.

7. Приведите к канонической форме уравнение $u_{xx}+x\cdot u_{yy}=0$ в каждой области плоскости x, y, в которой оно сохраняет тип.

Решение. Запишем дифференциальное уравнение характеристик: $(dy)^2+x\cdot(dx)^2=0$. Если $x<0$, то исходное уравнение гиперболического типа. В этом случае $dy=\pm\sqrt{-x}\cdot dx$, и мы имеем два независимых действительных интеграла уравнения характеристик: $y+\dfrac{2}{3}\cdot(-x)^{3/2}=const$, $y-\dfrac{2}{3}\cdot(-x)^{3/2}=const$. Выполните замену переменных $\begin{cases}\xi=y+\dfrac{2}{3}\cdot(-x)^{3/2}\\ \eta=y-\dfrac{2}{3}\cdot(-x)^{3/2}\end{cases}$. Для этого выразите u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy} в переменных ξ, η и подставьте u_{xx}, u_{yy} в исходное уравнение. Вы должны получить $u_{\xi\eta} = \dfrac{u_\xi - u_\eta}{8 \cdot (-x)^{3/2}}$. В силу выполняемой замены переменных $(-x)^{3/2} = \dfrac{3}{4} \cdot (\xi - \eta)$. Окончательно: $u_{\xi\eta} = \dfrac{u_\xi - u_\eta}{6 \cdot (\xi - \eta)}$ — первая каноническая форма уравнения в области $\xi > \eta$. Можно вместо ξ, η ввести другие переменные: $\begin{cases} \tilde{\xi} = y \\ \tilde{\eta} = \dfrac{2}{3} \cdot (-x)^{3/2} \end{cases}$. Снова выразите u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy} в переменных $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ и из исходного уравнения получите $u_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}} - u_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} = \dfrac{u_{\tilde{\eta}}}{3\tilde{\eta}}$ — его вторую каноническую форму. Зная, что $\begin{cases} \tilde{\xi} = \dfrac{1}{2} \cdot (\xi + \eta) \\ \tilde{\eta} = \dfrac{1}{2} \cdot (\xi - \eta) \end{cases}$, проверьте полученные ответы, переходя от первой канонической формы ко второй и наоборот.

Если $x > 0$, то исходное уравнение эллиптического типа. В этом случае получаем два комплексно сопряженных интеграла уравнения характеристик: $y + \dfrac{2}{3} i \cdot x^{3/2} = const$, $y - \dfrac{2}{3} i \cdot x^{3/2} = const$. Выберем новые действительные независимые переменные: $\begin{cases} \tilde{\xi} = y \\ \tilde{\eta} = \dfrac{2}{3} \cdot x^{3/2} \end{cases}$. Выразите u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy} в новых переменных и получите каноническую форму исходного уравнения $u_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}} + u_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} + \dfrac{u_{\tilde{\eta}}}{3\tilde{\eta}} = 0$ в области $\tilde{\eta} > 0$.

Если $x = 0$, то формально исходное уравнение параболического типа. Но имеет ли смысл при $x = 0$ указывать его тип как тип уравнения в частных производных?

Замечание. Рассмотренное уравнение называется уравнением Трикоми. В газовой динамике оно описывает дозвуковое движение в области гиперболичности и сверхзвуковое движение в области эллиптичности.

8. Приведите к канонической форме уравнения 6 – 25 темы 1 в каждой области плоскости x, y, где сохраняется тип уравнения.

Тема 12.

Формула Д'Аламбера. Решение задач для однородного волнового уравнения методом распространяющихся волн.

Литература: [1], гл. II, § 2, п. 1, 2, 3, 6, 7.

1. Решите задачу Коши для однородного волнового уравнения:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \; -\infty < x < +\infty, \; t > 0; \; a > 0;$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \; -\infty < x < +\infty;$$
$$u_t(x,0) = \psi(x), \; -\infty < x < +\infty.$$

Решение. Поставленную задачу можно интерпретировать как задачу о поперечных колебаниях бесконечной струны или о продольных колебаниях бесконечного стержня. Колебания свободные, т.е. в рассматриваемой модели не учитываются внешние силы: все движения обусловлены действием упругих сил.

Приведите однородное волновое уравнение к первой канонической форме уравнения гиперболического типа (см. тему 11). Для этого запишите дифференциальное уравнение характеристик $(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0$ и найдите два его интеграла. Введите новые независимые переменные ξ, η и запишите уравнение в новых переменных. Вы должны получить $u_{\xi\eta} = 0$.

(Поскольку исходное уравнение имеет постоянные коэффициенты, его характеристиками оказались прямые линии на плоскости x, t).

Интегрируя полученное уравнение по η и по ξ, найдите его общее решение: $u(\xi,\eta)=f_1(\xi)+f_2(\eta)$, где f_1, f_2 — произвольные дважды дифференцируемые функции. Вернитесь к прежним переменным: $u(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at)$. Какой физический смысл имеет $f_1(x+at)$? $f_2(x-at)$? Какой физический смысл имеет параметр a?

Конкретный вид функций f_1, f_2 можно найти из начальных условий. Подставьте полученное решение $u(x,t)$ в начальные условия и проинтегрируйте по t второе из них. Решите относительно $f_1(x)$, $f_2(x)$ полученную систему линейных алгебраических уравнений. Запишите решение исходной задачи Коши. Вы должны получить формулу Д'Аламбера :

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz .$$

Какими должны быть функции φ и ψ в условии задачи Коши, чтобы формула Д'Аламбера давала её классическое решение ? Что описывает эта формула, если зафиксировать момент времени $t=t_0$? Если зафиксировать координату $x=x_0$? Деформируется ли со временем в рассматриваемой модели профиль бегущей влево (вправо) волны или он только сдвигается вдоль оси x? Какова величина этого сдвига в момент времени t?

2. Плоскость переменных x, t называется фазовой плоскостью. Вдоль каких линий на фазовой плоскости будет сохранять постоянное значение функция $u=f(x-at)$? $u=f(x+at)$? Пусть функция $f(x)$ отлична от нуля только в промежутке (x_1, x_2). Найдите на фазовой плоскости передний и задний фронты волны $u=f(x-at)$, бегущей вправо; волны

$u = f(x+at)$, бегущей влево. Найдите области, в которых волна ещё не добежала, создаёт возмущение , уже прошла.

Зафиксируйте на фазовой плоскости точку $M(x_0, t_0)$, $t_0 > 0$. Проведите через M две характеристики: $x - at = x_0 - at_0$, $x + at = x_0 + at_0$. Пусть P и Q — точки их пересечения с осью x. Треугольник MPQ называется характеристическим. Чем в соответствии с формулой Д'Аламбера определяется значение решения u в точке x_0 в момент времени t_0 ?

Пусть в задаче Коши для однородного волнового уравнения начальные данные отличны от нуля только в промежутке (x_1 , x_2). Проведите через точки фазовой плоскости $A(x_1, 0)$ и $B(x_2, 0)$ пары характеристик и разбейте ими полуплоскость $t > 0$ на шесть областей. Для каждой из этих областей укажите, создаёт ли в ней возмущение волна, бегущая вследствие начального возмущения вправо (влево). В каждой из шести областей выберите произвольную точку $M(x_0, t_0)$ и постройте для неё характеристический треугольник MPQ. Запишите значения $u(x_0, t_0)$ решения указанной задачи Коши в каждой из шести областей.

Пусть снова в задаче Коши для волнового уравнения начальные данные отличны от нуля только в (x_1 , x_2). Найдите зависимость величины u от переменной x в каждый фиксированный момент времени $t_0 > 0$. Для этого проведите на фазовой плоскости прямую $t = t_0 = const > 0$. (Очевидно, придётся рассмотреть два случая). При каких значениях x эта прямая пересекает каждую из шести выделенных выше областей фазовой плоскости? Для каждого найденного промежутка изменения x запишите $u(x, t_0)$; нарисуйте в каждом случае характеристический треугольник.

Для той же задачи Коши с отличными от нуля на (x_1 , x_2) начальными данными найдите зависимость величины u

от переменной t при каждом фиксированном x_0. Проведите на фазовой плоскости прямую $x = x_0 = const$. (Очевидно, придётся рассмотреть четыре случая.) При каких значениях t эта прямая пересекает каждую из шести выделенных выше областей фазовой плоскости ? Для каждого найденного промежутка изменения t запишите $u(x_0, t)$; рисуйте в каждом случае характеристический треугольник.

Пусть теперь в задаче Коши для волнового уравнения начальные данные отличны от нуля только в двух непересекающихся промежутках (x_1, x_2) и (x_3, x_4). Разбейте фазовую плоскость на области проходящими через концы этих промежутков парами характеристик. Для каждой области фазовой плоскости укажите, какими волнами определяется там возмущение. В каждой области выберите произвольную точку $M(x_0, t_0)$ и постройте для неё характеристический треугольник MPQ. Как надо строить решение $u(x_0, t_0)$ в каждой из указанных областей?

3. Решите задачу Коши для однородного волнового уравнения в области $-\infty < x < +\infty$ с начальными условиями

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{c}, & |x| \le c; \\ 0, & |x| > c, \end{cases} \qquad u_t(x,0) = 0.$$

Нарисуйте графики зависимости u от x для фиксированных значений $t = t_i = \dfrac{c \cdot i}{4a}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Указание. Сначала представьте $u(x,0)$ в виде суммы двух одинаковых треугольных волн высотой $\dfrac{1}{2}$. Затем в каждый момент времени складывайте профили двух разбегающихся указанных треугольных волн.

Можно ли полученное решение считать классическим решением задачи Коши для волнового уравнения? Приведите пример последовательности достаточно гладких функций, равномерно приближающих данное негладкое начальное условие.

4. Решите задачу Коши для однородного волнового уравнения в области $-\infty < x < +\infty$ с начальными условиями

$$u(x,0)=0\,, \quad u_t(x,0)=\begin{cases} V = const \neq 0\,, & |x| \leq c\,; \\ 0\,, & |x| > c\,. \end{cases}$$

Нарисуйте графики зависимости u от x для фиксированных значений $t = t_i = \dfrac{c \cdot i}{4a}\,, i = 0\,, 2\,, 4\,, 6\,.$

Указание. Сначала нарисуйте график функции $\Psi(z) = \dfrac{1}{2a} \int\limits_{-\infty}^{z} \psi(\xi)\, d\xi$, где $\psi(\xi) = V$ при $-c \leq x \leq c$ и $\psi(\xi) = 0$ вне этого отрезка. Во что превращается формула Д'Аламбера в рассматриваемом случае ? Складывайте в каждый момент времени профили разбегающихся волн $\Psi(x+at)$ и $-\Psi(x-at)$.

Можно ли полученное решение считать классическим решением задачи Коши для волнового уравнения? Приведите пример последовательности достаточно гладких функций, приближающих данное разрывное начальное условие. Может ли такое приближение быть равномерным?

5. В задаче 3 найдите формулы, определяющие зависимость u от x в произвольный момент времени $t > 0$.

Указание. Найдите шесть указанных в пункте 2 областей фазовой плоскости. Рассмотрите случаи $0 < t \leq \dfrac{c}{a}$ и $t \geq \dfrac{c}{a}$. Для вывода формул пользуйтесь характеристическим треугольником.

Найдите формулы, определяющие зависимость u от t при фиксированном $x = x_0 = \frac{c}{2}$. Нарисуйте график функции $u\left(\frac{c}{2}, t\right)$.

6. В задаче 4 найдите формулы, определяющие зависимость u от x в произвольный момент времени $t > 0$.

Найдите формулы, определяющие зависимость u от t при фиксированном $x = x_0 = \frac{c}{2}$. Нарисуйте график функции $u\left(\frac{c}{2}, t\right)$.

7. Решите задачу Коши для однородного волнового уравнения в области $-\infty < x < +\infty$ с начальными условиями

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Скорость распространения волн вдоль оси x равна 1. Найдите зависимость u от времени t при каждом фиксированном $x = x_0$.

Можно ли считать решение $u(x,t)$ этой задачи классическим решением?

8. Если при описании поперечных колебаний струны или продольных колебаний стержня нас интересует участок, удалённый от одного конца, то в качестве модели колебаний получаем начально-краевую задачу для волнового уравнения на полупрямой $x \ge 0$. Дайте постановку этой задачи в случае краевого условия 1-го , 2-го рода. Проведите редукцию общей начально-краевой задачи на полупрямой; получите задачу с нулевым краевым условием.

Начально-краевую задачу для однородного волнового уравнения на полупрямой с нулевым краевым условием можно свести к задаче Коши на всей прямой. Это сведение основано на следующих двух фактах.

Если в задаче Коши для однородного волнового уравнения на прямой начальные данные $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ —нечётные функции, то её решение обращается в нуль при $x = 0$ во все моменты времени t: $u(0,t) = 0$.

Если в указанной задаче Коши $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — чётные функции, то производная u_x её решения обращается в нуль при $x = 0$ во все моменты времени t: $u_x(0,t) = 0$.

Сведите задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}\,,\ 0 < x < +\infty\,,\ t > 0\,;$$
$$u(0,t) = 0\,,\ t > 0\,;$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x < +\infty\,;$$
$$u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 \le x < +\infty$$

к задаче Коши на всей прямой. С помощью формулы Д'Аламбера запишите решение исходной задачи на $0 \le x < +\infty$. (Помните , что в ответе не может быть значений $x < 0$.)

Сведите задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}\,,\ 0 < x < +\infty\,,\ t > 0\,;$$
$$u_x(0,t) = 0\,,\ t > 0\,;$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x < +\infty\,;$$
$$u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 \le x < +\infty$$

к задаче Коши на всей прямой. С помощью формулы Д'Аламбера запишите решение исходной задачи на $0 \le x < +\infty$.

9.

$$u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx}\ , \quad 0 < x < +\infty\ , \quad t > 0\ ;$$
$$u(0,t) = 0\ , \quad t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x-2c|}{c}\ , & c \le x \le 3c\ ; \\ 0\ , & x \notin [c\,,3c]\ ; \end{cases}$$
$$u_t(x,0) = 0\ , \quad 0 \le x < +\infty\ .$$

Нарисуйте график зависимости u от x в фиксированные моменты времени $t = t_i = \dfrac{c \cdot i}{2a}\ , i = 0\ , 2\ , 3\ , 4\ , 7$. Как происходит отражение волны от границы $x = 0$ заданной области: с переворотом или без?

10.

$$u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx}\ , \quad 0 < x < +\infty\ , \quad t > 0\ ;$$
$$u_x(0,t) = 0\ , \quad t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = 0\ , \quad 0 \le x < +\infty\ ;$$
$$u_t(x,0) = \begin{cases} V = const \ne 0\ , & c \le x \le 2c\ ; \\ 0\ , & x \notin [c\,,2c]. \end{cases}$$

Нарисуйте график зависимости u от x в фиксированные моменты времени $t = t_i = \dfrac{c \cdot i}{a}\ , i = 0\ , 1\ , 2\ , 4$. Как происходит отражение волны от границы $x = 0$ заданной области: с переворотом или без?

11. В задаче 9 найдите формулы, определяющие зависимость u от x в произвольный момент времени $t > 0$. Сопоставьте эти формулы с рисунками из задачи 9.

Указание. Постройте нужное продолжение начальных данных. Разбейте фазовую полуплоскость $-\infty < x < +\infty\ , t > 0$ на области при помощи характеристик. Оставьте только часть

$x > 0$ этого разбиения. Сколько осталось областей в квадранте $x > 0$, $t > 0$? В каждой из них выберите произвольную точку M и постройте характеристический треугольник MPQ. В каких областях решение постоянно? Проведите прямые $t = t_0 = const$ и найдите их пересечения с указанными областями. Сколько надо рассмотреть случаев выбора t_0? Для каждого случая запишите требуемые формулы.

12. В задаче 10 найдите формулы, определяющие зависимость u от x в произвольный момент времени $t > 0$.

13. Решите начально-краевую задачу для однородного волнового уравнения в области $x \geq 0$ с условиями

$$u(0,t) = 0, \quad t > 0; \quad u(x,0) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi; \\ 0, & x \geq \pi; \end{cases} \quad u_t(x,0) = 0.$$

Скорость распространения волн вдоль оси x равна 1.

Найдите зависимость u от x в каждый момент времени t. Найдите зависимость u от t для каждого фиксированного x.

14. Решите начально-краевую задачу для однородного волнового уравнения в области $x \geq 0$ с условиями $u(0,t) = 0$, $t > 0$; $u(x,0) = \sin(kx)$, $k = const > 0$, $0 \leq x < +\infty$;
$u_t(x,0) = -k \cdot b \cdot \cos(kx)$, $0 \leq x < +\infty$, где b – скорость распространения волн вдоль оси x: $b = const > 0$.

Нарисуйте график зависимости u от t при фиксированном $x = x_0 = \dfrac{2\pi}{k}$. Нарисуйте график зависимости u от x при фиксированном $t = t_0 = \dfrac{3\pi}{k \cdot b}$.

15. Решите начально-краевую задачу для однородного волнового уравнения в области $x \geq 0$ с условиями

$$u_x(0,t)=0, \quad t>0; \quad u(x,0)=\begin{cases}\cos x, & 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2};\\ 0, & x \geq \dfrac{\pi}{2};\end{cases}$$

$u_t(x,0)=0, \quad 0 \leq x < +\infty$. Скорость распространения волн вдоль оси x равна b.

Нарисуйте график зависимости u от t при фиксированном $x = x_0 = \dfrac{\pi}{4}$. Нарисуйте график зависимости u от x при фиксированном $t = t_0 = \dfrac{\pi}{4b}$.

16.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ 0 < x < +\infty, \ t > 0;$$
$$u(0,t) = \mu(t), \ t > 0;$$
$$u(x,0) = 0, \ 0 \leq x < +\infty;$$
$$u_t(x,0) = 0, \ 0 \leq x < +\infty.$$

Найдите зависимость u от x в каждый момент времени $t > 0$.

Указание. Граничный режим вызовет волну, бегущую вдоль оси x вправо. Найдите её профиль из краевого условия и учтите, что всегда будет область достаточно больших значений x, куда волна ещё не добежала.

17.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}\,,\; 0 < x < +\infty\,,\; t > 0\,;$$
$$u_x(0,t) = -\frac{F(t)}{k}\,,\; t > 0\,;\; F(t) = 0\,,\; t \le 0\,;$$
$$u(x,0) = 0\,,\; 0 < x < +\infty\,;$$
$$u_t(x,0) = 0\,,\; 0 < x < +\infty\,.$$

Смысл постоянной $k > 0$ см. в задаче 1 темы 10.

Найдите профиль волны, вызванной граничным режимом. Найдите зависимость u от x в каждый момент времени $t > 0$.

18.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}\,,\; 0 < x < l\,,\; t > 0\,;$$
$$u(0,t) = 0\,,\; u(l,t) = 0\,,\; t > 0\,;$$
$$u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{l}\,,\; 0 \le x \le l\,;$$
$$u_t(x,0) = 0\,,\; 0 \le x \le l\,.$$

Постройте продолжение начальных данных на всю прямую $-\infty < x < +\infty$ из условий нечётности этого продолжения относительно точек $x = 0$ и $x = l$ и периодичности с периодом $2l$. Запишите формулу Д'Аламбера. Найдите решение исходной задачи на отрезке.

Дополнение к теме 12.

19. В момент времени $t = 0$ неограниченная струна $-\infty < x < +\infty$ получает поперечный укол иголкой в точке $x = 0$, передающий ей импульс I. Начальное поперечное отклонение равно нулю. Начальная поперечная скорость струны в точках $x \ne 0$ равна нулю. Найдите отклонение $u(x,t)$ точек струны от положения равновесия.

Решение. Пусть $\rho = const$ — масса струны, приходящаяся на единицу её длины. Тогда импульс элемента струны dx с координатой x в момент времени t равен $u_t(x,t)\rho\, dx$. Суммарный импульс, передаваемый струне, равен

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_t(x,0)\rho\, dx$. Надо только указать, что этот импульс сосредоточен в точке $x = 0$:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}\ , -\infty < x < +\infty\ , t > 0\,;$$
$$u(x,0) = 0\ , -\infty < x < +\infty\,;$$
$$u_t(x,0) = \frac{I}{\rho}\delta(x),$$

где $\delta(x)$ — δ - функция, сосредоточенная в нуле (см. пункт 24 темы 5). Как и в задаче 4 нарисуйте сначала график функции $\Psi(z) = \frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{z}\frac{I}{\rho}\delta(x)dx$.

Затем складывайте в каждый момент времени профили разбегающихся волн. Поскольку в постановке задачи присутствует обобщённая функция, её решение надо понимать в обобщённом смысле. В чём проявляется неклассичность построенного решения?

Эту задачу можно решить и по-другому. Распределите импульс I равномерно по отрезку $-c \le x \le c$. Это значит, что иголка заменена плоским молотком. Тогда получится постановка задачи 4 с $V = \dfrac{I}{2c\rho}$. Устремите в решении этой задачи $c \to 0+$.

Для построения решения исходной задачи не имеет значения, как именно приближать δ - функцию. Рассмотрите другие способы распределения импульса в окрестности точки $x = 0$. В любом случае для получения окончательного ответа надо ширину распределения устремить к нулю.

20. Докажите, что $u(x,t) = \dfrac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a\cdot(t-\tau)}^{x+a\cdot(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\, d\tau$ является решением задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0\,;$$
$$u(x,0) = 0\,, \quad -\infty < x < +\infty\,;$$
$$u_t(x,0) = 0\,, \quad -\infty < x < +\infty\,,$$

если функция f непрерывна и имеет непрерывную производную $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x}$.

Указание. Пользуясь формулой Лейбница, найдите требуемые производные интеграла, зависящего от параметров x и t.

Тема 13.

<u>Решение начально-краевых задач для волнового уравнения методом разделения переменных</u>.

Литература: [1], гл. II, § 3, п. 1, 4, 5.

1.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}\,,\ 0 < x < l\,,\ t > 0\,;$$
$$u(0,t) = 0\,,\ u(l,t) = 0\,,\ t > 0\,;$$
$$u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{l}\,,\ 0 \le x \le l\,;$$
$$u_t(x,0) = 0\,,\ 0 \le x \le l\,.$$

Решение. Сначала найдём частные решения волнового уравнения вида $X(x)\cdot T(t)$, которые удовлетворяют краевым условиям. Для этого проведём разделение переменных и получим две задачи:

$$X''_{xx}(x) + \lambda\cdot X(x) = 0\,,\ 0 < x < l\,;\qquad T''_{tt}(t) + \lambda\cdot a^2\cdot T(t) = 0\,.$$
$$X(0) = 0\,,\ X(l) = 0\,;$$

Собственным значениям $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $n = 1, 2, \ldots$, отвечают собственные функции $X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x$ и решения второго уравнения $T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l}t\right)$. Общее решение волнового уравнения, удовлетворяющее краевым условиям, имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l}t\right)\right)\cdot \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Коэффициенты A_n и B_n можно найти из начальных условий исходной задачи, раскладывая $u(x,0)$ и $u_t(x,0)$ в ряды Фурье по системе $\{X_n\}$.

Найдите A_n и B_n для заданных начальных условий и сравните построенное решение $u(x,t)$ с решением задачи 18 темы 12.

2. Решите начально-краевую задачу для однородного волнового уравнения в области $0 \le x \le \pi$ с условиями $u(0,t) = 0$, $t > 0$; $u_x(\pi,t) = 0$, $t > 0$;

$$u(x,0) = \sin\frac{3x}{2} + \sin\frac{5x}{2}, \quad 0 \le x \le \pi;$$

$$u_t(x,0) = b\cdot\sin\frac{7x}{2}, \quad 0 \le x \le \pi,$$

где b – скорость распространения волн вдоль оси x, $b = const > 0$.

3.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}\ ,\ 0 < x < \pi\ ,\ t > 0\ ;$$

$$u_x(0,t) = 0\ ,\ u(\pi,t) = 0\ ,\ t > 0\ ;$$

$$u(x,0) = \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{7x}{2}\ ,\ 0 \le x \le \pi\ ;$$

$$u_t(x,0) = a\cos\frac{5x}{2},\ 0 \le x \le \pi\ .$$

4. Решите начально-краевую задачу для однородного волнового уравнения в области $0 \le x \le 1$ с условиями $u_x(0,t) = 0\ , t > 0\ ; u(1,t) = 0\ , t > 0\ ; u(x,0) = 1 - x\ ,\ \ 0 \le x \le 1$ $u_t(x,0) = 0\ ,\quad 0 \le x \le 1$. Скорость распространения волн вдоль оси x равна 2.

5.

$$u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 8u + 2x(1-4t) + \cos 3x\ ,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}\ , t > 0\ ;$$

$$u_x(0,t) = t\ ,\ u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \frac{\pi t}{2}\ , t > 0\ ;$$

$$u(x,0) = 0\ ,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\ ;$$

$$u_t(x,0) = x\ ,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\ .$$

Указание. Сначала выполните замену неизвестной функции: $u(x,t) = v(x,t) + xt$; запишите задачу для v. Полученное уравнение можно упростить ещё одной заменой неизвестной функции: $v(x,t)=e^{\alpha x+\beta t}w(x,t)$. Выберите α и β так, чтобы в уравнении для w не было члена, содержащего w_t. Найдите собственные функции $X_n(x)$, отвечающие краевой задаче для уравнения $w_{tt}=w_{xx}$. Ищите решение полученного неоднородного уравнения в виде $w(x,t)=\sum_n X_n(x)\cdot T_n(t)$; разложите неоднородность уравнения в ряд Фурье по системе $\{X_n(x)\}$. Запишите задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно $T_n(t)$. При каких n их решения ненулевые?

Ответ: $u(x,t)=x\,t+\left(1-e^{-t}-t\,e^{-t}\right)\cos 3x$.

6.

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f_0\,,\; 0<x<l\,,\; t>0\,;\; f_0=const\neq 0\,;$$
$$u(0,t)=0\,,\; u(l,t)=0\,,\; t>0\,;$$
$$u(x,0)=0\,,\; 0\le x\le l\,;$$
$$u_t(x,0)=0\,,\; 0\le x\le l\,.$$

7.

$$u_{tt}=u_{xx}+\cos t\,,\; 0<x<\pi\,,\; t>0\,;$$
$$u(0,t)=0\,,\; u(\pi,t)=0\,,\; t>0\,;$$
$$u(x,0)=0\,,\; 0\le x\le \pi\,;$$
$$u_t(x,0)=0\,,\; 0\le x\le \pi\,.$$

8.

$$u_{tt}=4u_{xx}\,,\,0<x<\frac{\pi}{2}\,,t>0\,;$$
$$u(0,t)=t\,,\,u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right)=\pi\,,t>0\,;$$
$$u(x,0)=2\sin 5x+\pi x\,,\,0\le x\le\frac{\pi}{2}\,;$$
$$u_t(x,0)=1\,,\,0\le x\le\frac{\pi}{2}\,.$$

9.

$$u_{tt}=4u_{xx}+2\,,\,0<x<\pi\,,t>0\,;$$
$$u(0,t)=t^2\,,\,u(\pi,t)=4\pi+t^2\,,t>0\,;$$
$$u(x,0)=\sin x+4x\,,\,0\le x\le\pi\,;$$
$$u_t(x,0)=0\,,\,0\le x\le\pi\,.$$

10.

$$u_{tt}=4u_{xx}+2\,,\,0<x<\pi\,,t>0\,;$$
$$u(0,t)=t^2\,,\,u(\pi,t)=4\pi+t^2\,,t>0\,;$$
$$u(x,0)=4x\,,\,0\le x\le\pi\,;$$
$$u_t(x,0)=2\sin 3x\,,\,0\le x\le\pi\,.$$

11.

$$u_{tt} = u_{xx} + 3u + \sin t \cdot \cos 2x\,,\ 0 < x < \pi\,,\ t > 0\,;$$
$$u_x(0,t) = 0\,,\ u_x(\pi,t) = 0\,,\ t > 0\,;$$
$$u(x,0) = 0\,,\ 0 \le x \le \pi\,;$$
$$u_t(x,0) = 0\,,\ 0 \le x \le \pi\,.$$

12.

$$u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u\,,\ 0 < x < \pi\,,\ t > 0\,;$$
$$u_x(0,t) = 0\,,\ u(\pi,t) = 0\,,\ t > 0\,;$$
$$u(x,0) = 0\,,\ 0 \le x \le \pi\,;$$
$$u_t(x,0) = x\,,\ 0 \le x \le \pi\,.$$

Дополнение к теме 13.

13.

$$u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx}\,,\quad 0 < x < l\,,\quad t > 0\,;$$
$$u(0,t) = 0\,,\quad u(l,t) = 0\,,\quad t > 0\,;$$
$$u(x,0) = 0\,,\quad 0 \le x \le l\,;$$
$$u_t(x,0) = \delta(x - x_0)\,,\quad 0 \le x \le l\,,\quad 0 < x_0 < l\,.$$

14.

$$u_{tt} = u_{xx} - \sin t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$
$$u(0,t) = \sin t, \quad u_x(1,t) + u(1,t) = \cos t, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = x, \quad 0 \le x \le 1;$$
$$u_t(x,0) = 1, \quad 0 \le x \le 1.$$

15.

$$u_{tt} = u_{xx} - \sin t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$
$$u_x(0,t) = \cos t, \quad u_x(1,t) + u(1,t) = \sin t + \cos t, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = x - 1, \quad 0 \le x \le 1;$$
$$u_t(x,0) = 1, \quad 0 \le x \le 1 .$$

16.

$$u_{tt} = u_{xx} - 4 \cdot e^{-t} \cdot \cos t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$
$$u_x(0,t) + 2 \cdot u(0,t) = 3e^{-t} \cdot \sin t,$$
$$u(1,t) = e^{-t} \cdot \sin t, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1;$$
$$u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1 .$$

Тема 14.

Решение задач математической физики методами интегральных преобразований Фурье и Лапласа.

Литература: [2], гл. VIII; [5], гл. X, § 6.

Функция $\widehat{u}(\lambda)=\int\limits_a^b K(\lambda,\zeta)u(\zeta)d\zeta$ называется интегральным преобразованием функции $u(\zeta)$. Интегральное преобразование задаётся выбором промежутка интегрирования (a,b) и ядра $K(\lambda,\zeta)$. Интегральное преобразование определено на некотором классе функций $u(\zeta)$, называемых **оригиналами**; $\widehat{u}(\lambda)$ называют при этом **изображением** оригинала $u(\zeta)$. Применение интегральных преобразований для решения задач математической физики состоит в том, что вместо непосредственного определения функции u, удовлетворяющей дифференциальному уравнению в частных производных, ищется сначала её интегральное преобразование определённого типа (по выбранной переменной ζ). После выполнения этого преобразования над уравнением получим для $\widehat{u}$ более простое уравнение в пространстве изображений, в котором число независимых переменных на 1 меньше. Дополнительные условия (кроме условий, гарантирующих возможность применения интегрального преобразования) также переводятся в соответствующие дополнительные условия для $\widehat{u}$. После решения построенной в пространстве изображений задачи надо восстановить оригинал u по найденному его изображению $\widehat{u}$. Это можно сделать при помощи соответствующей формулы обращения интегрального преобразования или по таблицам прямых и обратных преобразований часто встречающихся функций.

Напомним некоторые интегральные преобразования и формулы их обращения; всюду далее будем считать выполненными условия их применимости.

Преобразование Фурье:

$$\hat{u}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda\zeta}\cdot u(\zeta)d\zeta; \qquad u(\zeta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda\zeta}\cdot\hat{u}(\lambda)d\lambda.$$

Синус-преобразование Фурье:

$$\hat{u}_S(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\sin(\lambda\zeta)\cdot u(\zeta)d\zeta;$$

$$u(\zeta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\sin(\lambda\zeta)\cdot\hat{u}_S(\lambda)d\lambda.$$

Косинус-преобразование Фурье:

$$\hat{u}_C(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\cos(\lambda\zeta)\cdot u(\zeta)d\zeta;$$

$$u(\zeta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\cos(\lambda\zeta)\cdot\hat{u}_C(\lambda)d\lambda.$$

Преобразование Лапласа (вместо λ пишем p):

$$U(p)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-p\zeta}\cdot u(\zeta)d\zeta, \qquad p=\xi+i\eta -$$ комплексная переменная;

$$u(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty}e^{p\zeta}\cdot U(p)dp,$$ где интеграл берётся вдоль любой вертикальной прямой $\operatorname{Re}p=\xi$, ξ больше показателя степени роста оригинала u.

Замечание. В каждой из задач 1 – 12 изображение искомой функции удовлетворяет задаче Коши для некоторого обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Решить эту задачу Коши можно, например, методом преобразования Лапласа.

1. $$u_t = a^2 u_{xx}\,,\ -\infty < x < +\infty\,,\ t > 0\,;$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\ -\infty < x < +\infty.$$

Решите задачу методом преобразования Фурье по переменной x.

2. $$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ -\infty < x < +\infty\,,\ t > 0\,;$$
$$u(x,0) = 0\,,\ -\infty < x < +\infty.$$

Решите задачу методом преобразования Фурье по переменной x.

3. $$u_t = a^2 u_{xx}\,,\ 0 < x < +\infty\,,\ t > 0\,;$$
$$u(0,t) = 0,\ t > 0; \quad u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x < +\infty.$$

Решите задачу методом синус-преобразования Фурье по переменной x.

4. $$u_t = a^2 u_{xx}\,,\ 0 < x < +\infty\,,\ t > 0\,;$$
$$u_x(0,t) = 0,\ t > 0; \quad u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x < +\infty.$$

Решите задачу методом косинус-преобразования Фурье по переменной x.

5. $$u_t = a^2 u_{xx}\,,\ 0 < x < +\infty\,,\ t > 0\,;$$
$$u(0,t) = \mu(t),\ t > 0; \quad u(x,0) = 0\,,\ 0 \le x < +\infty.$$

Решите задачу методом синус-преобразования Фурье по переменной x.

6. $$u_t = a^2 u_{xx}\,,\ 0 < x < +\infty\,,\ t > 0\,;$$
$$u_x(0,t) = \nu(t),\ t > 0; \quad u(x,0) = 0\,,\ 0 \le x < +\infty.$$

Решите задачу методом косинус-преобразования Фурье по переменной x.

7. $$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < +\infty,\ t > 0;$$
$$u(0,t) = 0,\ t > 0; \quad u(x,0) = 0,\ 0 \le x < +\infty.$$

Решите задачу методом синус-преобразования Фурье по переменной x.

8. $$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < +\infty,\ t > 0;$$
$$u_x(0,t) = 0,\ t > 0; \quad u(x,0) = 0,\ 0 \le x < +\infty.$$

Решите задачу методом косинус-преобразования Фурье по переменной x.

9. $$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ -\infty < x < +\infty,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x),\ -\infty < x < +\infty.$$

Решите задачу методом преобразования Фурье по переменной x.

10. $$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ -\infty < x < +\infty,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0,\ -\infty < x < +\infty.$$

Решите задачу методом преобразования Фурье по переменной x.

11. $$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < +\infty,\ t > 0;$$
$$u(0,t) = 0, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 \le x < +\infty.$$

Решите задачу методом синус-преобразования Фурье по переменной x.

12. $$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < +\infty,\ t > 0;$$
$$u_x(0,t) = 0, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 \le x < +\infty.$$

Решите задачу методом косинус-преобразования Фурье по переменной x.

13. Задачу 5 решите методом преобразования Лапласа по переменной t.

14. В задачах 6, 7, 12 темы 13 найдите условия, которые для решения $u(x,t)$ определяют его преобразование Лапласа по переменной t.

15. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$;

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = A\sin(\omega t), \quad t > 0;$$

$$A = const, \quad \omega = const;$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \; 0 \le x \le l.$$

Найдите преобразование Лапласа по переменной t решения задачи $u(x,t)$.

Ответы

Тема 1.

(о характеристиках см. тему 11)

3. Уравнение теплопроводности параболического типа.

4. Уравнение Лапласа эллиптического типа.

5. Волновое уравнение гиперболического типа.

8. В области $\begin{cases} x<0 \\ y>0 \end{cases}$ уравнение гиперболического типа, имеет два семейства действительных характеристик $(-x)^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=const$ и $(-x)^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}=const$. Заменой переменных $\begin{cases} \xi=(-x)^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}} \\ \eta=(-x)^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}} \end{cases}$ уравнение приводится к первой канонической форме $u_{\xi\eta}=\dfrac{2}{3\left(\xi^2-\eta^2\right)}\cdot\left(\eta\cdot u_\xi-\xi\cdot u_\eta\right)$, а заменой переменных $\begin{cases} \tilde{\xi}=(-x)^{\frac{3}{2}} \\ \tilde{\eta}=y^{\frac{3}{2}} \end{cases}$ оно приводится ко второй канонической форме

$$u_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}}-u_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}}=\frac{1}{3}\left(\frac{u_{\tilde{\eta}}}{\tilde{\eta}}-\frac{u_{\tilde{\xi}}}{\tilde{\xi}}\right).$$

В области $\begin{cases} x>0 \\ y<0 \end{cases}$ уравнение гиперболического типа, имеет два семейства действительных характеристик $x^{\frac{3}{2}}+(-y)^{\frac{3}{2}}=const$ и

$x^{\frac{3}{2}}-(-y)^{\frac{3}{2}}=const$. Заменой переменных $\begin{cases}\xi=x^{\frac{3}{2}}+(-y)^{\frac{3}{2}}\\ \eta=x^{\frac{3}{2}}-(-y)^{\frac{3}{2}}\end{cases}$ уравнение приводится к той же первой канонической форме, а заменой переменных $\begin{cases}\tilde{\xi}=x^{\frac{3}{2}}\\ \tilde{\eta}=(-y)^{\frac{3}{2}}\end{cases}$ оно приводится к той же второй канонической форме.

В области $\begin{cases}x>0\\ y>0\end{cases}$ уравнение эллиптического типа, действительных характеристик не имеет. Заменой переменных $\begin{cases}\tilde{\xi}=x^{\frac{3}{2}}\\ \tilde{\eta}=y^{\frac{3}{2}}\end{cases}$ уравнение приводится к канонической форме $u_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}}+u_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}}=-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{u_{\tilde{\eta}}}{\tilde{\eta}}+\dfrac{u_{\tilde{\xi}}}{\tilde{\xi}}\right)$.

В области $\begin{cases}x<0\\ y<0\end{cases}$ уравнение эллиптического типа. Заменой переменных $\begin{cases}\tilde{\xi}=(-x)^{\frac{3}{2}}\\ \tilde{\eta}=(-y)^{\frac{3}{2}}\end{cases}$ оно приводится к той же канонической форме.

9. В области $\begin{cases}x<0\\ y>0\end{cases}$ уравнение гиперболического типа, имеет два семейства действительных характеристик $\sqrt{-x}+\sqrt{y}=const$ и $\sqrt{-x}-\sqrt{y}=const$. Заменой переменных $\begin{cases}\xi=\sqrt{-x}+\sqrt{y}\\ \eta=\sqrt{-x}-\sqrt{y}\end{cases}$

уравнение приводится к первой канонической форме $u_{\xi\eta} = \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} \cdot \left(\xi \cdot u_\eta - \eta \cdot u_\xi\right)$, а заменой переменных $\begin{cases} \tilde{\xi} = \sqrt{-x} \\ \tilde{\eta} = \sqrt{y} \end{cases}$

оно приводится ко второй канонической форме $u_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}} - u_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} = \frac{u_{\tilde{\xi}}}{\tilde{\xi}} - \frac{u_{\tilde{\eta}}}{\tilde{\eta}}$.

В области $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$ уравнение гиперболического типа, имеет два семейства действительных характеристик $\sqrt{x} + \sqrt{-y} = const$ и $\sqrt{x} - \sqrt{-y} = const$. Заменой переменных $\begin{cases} \xi = \sqrt{x} + \sqrt{-y} \\ \eta = \sqrt{x} - \sqrt{-y} \end{cases}$ уравнение приводится к той же первой канонической форме, а заменой переменных $\begin{cases} \tilde{\xi} = \sqrt{x} \\ \tilde{\eta} = \sqrt{-y} \end{cases}$ оно приводится к той же второй канонической форме.

В области $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ уравнение эллиптического типа, действительных характеристик не имеет. Заменой переменных $\begin{cases} \tilde{\xi} = \sqrt{x} \\ \tilde{\eta} = \sqrt{y} \end{cases}$ уравнение приводится к канонической форме $u_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}} + u_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} = \frac{u_{\tilde{\xi}}}{\tilde{\xi}} + \frac{u_{\tilde{\eta}}}{\tilde{\eta}}$.

В области $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$ уравнение эллиптического типа. Заменой переменных $\begin{cases} \tilde{\xi} = \sqrt{-x} \\ \tilde{\eta} = \sqrt{-y} \end{cases}$ оно приводится к той же канонической форме.

19. Уравнение с постоянными коэффициентами всюду на плоскости x, y параболического типа, имеет одно семейство действительных характеристик $x - y = const$. Заменой переменных $\begin{cases} \xi = x - y \\ \eta = x + y \end{cases}$ уравнение приводится к канонической форме $u_{\eta\eta} + \frac{1}{2}u_\eta + \frac{1}{4}u = 0$, являющейся обыкновенным дифференциальным уравнением.

24. Уравнение с постоянными коэффициентами всюду на плоскости x, y параболического типа, имеет одно семейство действительных характеристик $x + y = const$. Заменой переменных $\begin{cases} \xi = x + y \\ \eta = x - y \end{cases}$ уравнение приводится к канонической форме $u_{\xi\xi} + u_\xi + 2u_\eta + \frac{1}{4}u = 0$. Заменой искомой функции $u = e^{-\frac{\xi}{2}} \cdot v$ получаем $v_{\xi\xi} + 2v_\eta = 0$.

Тема 2.

2. $\beta = -b$.

3. $u_t = a^2 \cdot u_{xx} + f(x,t)$.

9. $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t) = l$ в первом случае; $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t) = \frac{l}{2}$ во втором случае.

10. См. задачу 11 темы 3.

11. См. задачу 12 темы 3.

12. См. задачу 13 темы 3 при $p = -\dfrac{Q}{k \cdot S}$, где k – коэффициент теплопроводности, S – площадь поперечного сечения стержня.

15. См. задачу 3 темы 4.

16. См. задачу 4 темы 4.

Температура реального стержня неограниченно возрастать с течением времени не может. В рассматриваемой модели это не отражено; модель применима лишь для конечного интервала изменения t.

18.

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx}, \quad \omega_0 \cdot t < x < +\infty, \quad t > 0;$$
$$u(\omega_0 \cdot t, t) = \psi(t), \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x < +\infty.$$

19. $u_t = k \cdot u_{xx}$.

Тема 3.

3. $$u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\pi(2n+1)a}{2l}\right)^2 t\right\} \cdot \sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}x,$$ где

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}x \cdot dx.$$

4. $$u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\pi(2n+1)a}{2l}\right)^2 t\right\} \cdot \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x,$$

где $$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \cdot \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x \cdot dx.$$

5.

$$u=\frac{32}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3}\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}\right)^2 t\right\}\cdot\cos\frac{\pi(2n+1)}{2}x.$$

6. $$u=(x-l)+$$

$$+\frac{8l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2 t\right\}\cdot\cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x.$$

7. $$u=e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t}\cdot\sin\frac{\pi}{l}x;\quad \lim_{t\to+\infty}u(x,t)=0.$$

8. $$u=e^{-\frac{9a^2}{4}t}\cdot\cos\frac{3x}{2};\quad \lim_{t\to+\infty}u(x,t)=0.$$

9. $$u=e^{-\frac{25a^2}{4}t}\cdot\sin\frac{5x}{2};\quad \lim_{t\to+\infty}u(x,t)=0.$$

10.

$$u=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\exp\left\{-(\pi(2n+1)a)^2 t\right\}\cos(\pi(2n+1)x);$$

$$\lim_{t\to+\infty}u(x,t)=\frac{1}{2}.$$

11.

$$u=\left(x\cdot\left(u_2-u_1\right)+u_1\right)+$$

$$+\frac{2}{\pi}\cdot\left(u_0+u_1-u_2\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot e^{-(\pi n a)^2 t}\cdot\sin(\pi n x)-$$

$$-\frac{4}{\pi}\cdot u_1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\cdot e^{-(\pi(2n+1)a)^2 t}\cdot\sin(\pi(2n+1)x);$$

$$\lim_{t\to+\infty}u(x,t)=x\cdot\left(u_2-u_1\right)+u_1.$$

12.

$$u=U+\frac{4}{\pi}\cdot e^{-bt}\cdot\left(u_0-U\right)\cdot$$

$$\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi(2n+1)a}{2l}\right)^2 t\right\}\cdot\cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x;$$

$$\lim_{t\to+\infty}u(x,t)=U.$$

13. $$u=p\left[\left(x-\frac{l}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\exp\left\{-\left(\frac{\pi(2n+1)a}{t}\right)^2 t\right\}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{l}(2n+1)x\right)\right];$$

$$\lim_{t\to+\infty}u(x,t)=p\left(x-\frac{l}{2}\right).$$

14. $X_n(x)=\cos\sqrt{\lambda_n}\,x$, где λ_n – корни уравнения

$$tg\left(\sqrt{\lambda}\cdot l\right)=\frac{h}{\sqrt{\lambda}};\qquad \left\|X_n\right\|^2=\frac{l}{2}+\frac{h}{2\cdot\left(h^2+\lambda_n\right)}.$$

15. $X_n(x)=\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\cdot(l-x)\right)$, где λ_n – корни уравнения

$tg\left(\sqrt{\lambda}\cdot l\right)=-\frac{\sqrt{\lambda}}{h}$; $\|X_n\|^2=\frac{l}{2}+\frac{h}{2\cdot\left(h^2+\lambda_n\right)}$.

Тема 4.

2. $u=t\cdot e^{-9\pi^2\cdot t}\cdot\sin(3\pi x)$.

4. Начальная температура и плотность распределения источников тепла не зависят от x. Поэтому $u(x,t)=V(t)$, поскольку с течением времени тепло не будет передаваться от одного участка стержня к другому и не будет теряться через концы стержня. $u(x,t)=V(t)=f_0\cdot t$. $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)=\infty$.

5. $$u=\frac{16f_0l^2}{a^2\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\left(1-e^{-\frac{\pi^2a^2(2n+1)^2}{4l^2}t}\right)\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}x;$$

$$\lim_{t\to+\infty}u(x,t)=\frac{16f_0l^2}{a^2\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin\frac{\pi}{2l}(2n+1)x.$$

7. $$u=p\left[\frac{x^2}{2l}+\frac{a^2}{l}t-\frac{l}{6}-\frac{2l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2t}\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\right].$$

8. $$u=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)\cdot\left[1+(2k+1)^4\right]}\cdot\left(\sin t+(2k+1)^2\cos t-\right.$$
$$\left.-(2k+1)^2e^{-(2k+1)^2t}\right)\cdot\sin(2k+1)x.$$

9. $u=2t+e^{-25t}\cdot\sin 5x$.

10. $$u = 2t + \frac{2}{25}\left(1 - e^{-25t}\right) \cdot \sin 5x .$$

11. $$u = e^{-4t} \cdot \sin 2x + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\left(1 - e^{-n^2 t}\right) \cdot \sin nx .$$

13.
$$u = xt - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\left(\pi^2 n^2 - 1\right)}\left[t - \frac{\pi^2 n^2}{\pi^2 n^2 - 1}\left(1 - e^{-\left(\pi^2 n^2 - 1\right)t}\right)\right]\sin(\pi n x)$$

14.
$$u = xt - \frac{t}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2\left(\pi^2 (2k+1)^2 - 1\right)} t \cdot \cos(\pi(2k+1)x) +$$

$$+ 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - \exp\left\{-\left(\pi^2 (2k+1)^2 - 1\right) \cdot t\right\}}{\left(\pi^2 (2k+1)^2 - 1\right)^2} \cdot \cos(\pi(2k+1)x).$$

15.
$$u = xt - \frac{32}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\lambda_k^2\left(\pi^2 \lambda_k^2 + 4\right)} t \cdot \sin\frac{\pi\lambda_k}{2} x -$$

$$- \frac{32}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^2}{\left(\pi^2 \lambda_k^2 + 4\right)^2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{4 + \pi^2 \lambda_k^2}{4} t}\right) \cdot \sin\frac{\pi\lambda_k}{2} x ,$$

$\lambda_k = 2k + 1$.

16. $$u = t(x-1) + \frac{32}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t}{\lambda_k^2\left(\pi^2 \lambda_k^2 + 4\right)} \cdot \cos\frac{\pi\lambda_k}{2} x -$$

$$- \frac{16}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\left(4 + \pi^2 \lambda_k^2\right) - 2\pi\lambda_k}{\lambda_k\left(\pi^2 \lambda_k^2 + 4\right)^2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{4 + \pi^2 \lambda_k^2}{4} t}\right) \cdot \cos\frac{\pi\lambda_k}{2} x , \quad \lambda_k = 2k + 1 .$$

17. $$u=\frac{16}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2-4}\left[\frac{3}{(2n-5)(2n+7)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}\right]\cdot\left(1-e^{\frac{4-(2n+1)^2}{4}t}\right)\cdot\sin\frac{1+2n}{2}x.$$

18. $$u=\left(t^2+1\right)\cdot x-1+\frac{2}{25\pi^2}\cdot\left(1-e^{-25\pi^2 t}\right)\cdot\cos\frac{5\pi}{2}x.$$

19. $$u=t\cdot x^2+x+\frac{1}{9}\cdot\left(1-e^{-9t}\right)\cdot\cos 3x.$$

20. $$u=\frac{2}{3}\cdot\left(1-e^{\frac{3}{4}t}\right)\cdot\sin\frac{x}{2}+\frac{2}{5}\cdot\left(1-e^{-\frac{5}{4}t}\right)\cdot\sin\frac{3x}{2}.$$

21. $$u=x+\frac{1}{8}\cdot\left(1-e^{-8t}\right)\cdot\sin 3x+t\cdot\sin x.$$

22. $$u=t\cdot x+e^{x-\left(1+\pi^2\right)t}\cdot\sin\pi x.$$

23. $$u=t\cdot x^2+\frac{1}{4}\cdot\left(e^{4t}-1\right)+t\cdot\cos 2x.$$

24. $$u=1+t+e^{x}\cdot\left(1-e^{-t}\right)\cdot\sin x+e^{x-4t}\cdot\sin 2x.$$

25. $$u=x\cdot t^2+e^{-3t}\cdot\cos 2x+\sin t-\cos t+e^{t}.$$

1.

$$u_t = a^2 \cdot u_{xx}\ , \quad -\infty < x < +\infty\ , \quad t > 0\ ;$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty\ ;$$
$$|u(x,t)| < const\ .$$

Из ограниченности решения следует его единственность.

4. $$u = (1+t)\cdot e^{-t}\cdot \cos x\ .$$

5. $$u = ch\,t \cdot \sin x\ .$$

6. $$u = 1 - \cos t + \frac{1}{\sqrt{1+4t}}\cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{1+4t}\right\}.$$

7. $$u = \frac{x}{(1+4t)^{\frac{3}{2}}}\cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{1+4t}\right\}.$$

8. $$u = \frac{1}{\sqrt{1+t}}\cdot \exp\left\{-\frac{x^2-2x-t}{1+t}\right\}.$$

9. $$u = \frac{1}{\sqrt{1+t}}\cdot \sin\frac{x}{1+t}\cdot \exp\left\{-\frac{4x^2+t}{4(1+t)}\right\}.$$

10. $$\lim_{t\to 0+} u(x_0,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x_0-0)+\varphi(x_0+0)\right].$$

12. $$u(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi;t-\tau)\cdot f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\ .$$

13. $\lim\limits_{t\to 0+} G_{x\neq\xi} = 0$, $\lim\limits_{t\to 0+} G_{x=\xi} = +\infty$. Температура реального стержня в точке $x \neq \xi$ не может мгновенно измениться из-за выделения тепла в точке ξ. В рассматриваемой модели это не отражено.

15. $$\lim_{t\to 0+} u(0,t) = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad \lim_{t\to +\infty} u(x,t) = \frac{u_1 + u_2}{2}.$$

16. $$u = \frac{u_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}}\right)\right]; \quad \lim_{t\to 0+} u(\pm l,t) = \frac{u_0}{2}.$$

17. $$u = \frac{1}{2}\cdot e^{\alpha^2 t - \alpha x}\cdot\left[1 - \Phi\left(\frac{2\alpha t - x}{2\sqrt{t}}\right)\right].$$

18. В случае краевого условия 1-го рода

$$G(x,\xi;t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\left[\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right\}\right];$$

в случае краевого условия 2-го рода

$$G(x,\xi;t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\left[\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\} + \exp\left\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right\}\right].$$

19. $$u = \frac{u_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}}\right)\right];$$

$$\lim_{t\to 0+} u(l,t) = \frac{u_0}{2}; \quad \lim_{t\to +\infty} u(x,t) = 0.$$

20. $$u=\frac{1}{\sqrt{1+4a^2\cdot\alpha\cdot t}}\cdot\exp\left\{-\frac{\alpha x^2}{1+4a^2\cdot\alpha\cdot t}\right\};$$

$\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)=0$.

21. $$u=u_0\cdot\left[1-\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right];\quad \lim_{t\to+\infty}u(x,t)=u_0.$$

Плотность потока тепла через конец стержня равна $\dfrac{k\cdot u_0}{a\cdot\sqrt{\pi t}}$.

22. $$u=u_0\cdot\left[1-e^{-ht}\cdot\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$

Тема 6.

1. u_1 и u_4 – гармонические функции; u_2 и u_3 – не являются гармоническими.

2. $\vec{A}_1=-grad\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\vec{A}_3=grad(xyz)$; $\vec{A}_2$ и $\vec{A}_4$ не являются потенциальными.

3.
$$\frac{\partial u_1}{\partial n}=\frac{3}{a}\cdot x\cdot y\cdot z;\quad \frac{\partial u_2}{\partial n}=2a;\quad \frac{\partial u_3}{\partial n}=\frac{3}{a}\left(x^3+y^3+z^3\right).$$

4. $4\pi a^3$; $\dfrac{12}{5}\pi a^5$; 0.

5. u_1, u_2, u_3, u_4, u_7, u_9 – гармонические функции; u_5, u_6, u_8, u_{10} не являются гармоническими.

13. $$\Delta u=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$ – оператор Лапласа в полярной системе координат.

14. Если сферические координаты r, φ, θ связаны с декартовыми координатами x, y, z формулами

$x=r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi$, $y=r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi$, $z=r\cdot\cos\theta$, то

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

Тема 7.

2. $$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-r^2}{r^2-2ar\cdot\cos(\varphi-\xi)+a^2}\cdot f(\xi)d\xi.$$

6. Не выполнено необходимое условие разрешимости: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=a}\cdot d\varphi\neq 0$.

7. $r^3\sin 3\varphi$; $\frac{1}{2}(1-r^2\cdot\cos 2\varphi)$; $\frac{1}{2}(1+r^2\cdot\cos 2\varphi)$.

8. $r\cdot\sin\varphi+const$; $r\cdot(\sin\varphi+\cos\varphi)+const$; нет решений.

9. $u=\frac{1}{r}\cos\varphi$.

10. $u=\frac{1}{r}\cos\varphi+const$.

12. $$u=\log_{\frac{a}{b}}\frac{\sqrt{a}\,r}{\sqrt{b}\,b}+\frac{r^4-a^2b^2}{2r^2\left(a^2-b^2\right)}\cdot\cos 2\varphi.$$

14. $$u=\left(\frac{r}{2}\right)^{3\pi}\sin(3\pi\varphi).$$

16.

$$u=\left(3^{2\pi}\cdot\left(\frac{2}{r}\right)^{\pi}-(2\cdot r)^{\pi}\right)\cdot\frac{\sin(\pi\varphi)}{3^{2\pi}-2^{2\pi}}-$$

$$-\left(2^{3\pi}\cdot\left(\frac{3}{r}\right)^{\frac{3\pi}{2}}-(3\cdot r)^{\frac{3\pi}{2}}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\varphi\right)}{3^{3\pi}-2^{3\pi}}.$$

18.

$$u=\frac{r^2-a^2}{4}+\frac{b^2-a^2}{4}\cdot\ln_{\frac{a}{b}}\left(\frac{r}{a}\right)+$$

$$+\frac{a^3\left(b^2-r^2\right)\sin\varphi+b^3\left(r^2-a^2\right)\cos\varphi}{r\left(b^2-a^2\right)}.$$

21. $$u=\frac{\sin\frac{\pi x}{a}\cdot sh\frac{\pi(b-y)}{a}}{sh\frac{\pi b}{a}}+\frac{\sin\frac{\pi y}{b}\cdot sh\frac{\pi(a-x)}{b}}{sh\frac{\pi a}{b}}.$$

22. $$u=\frac{\sin\frac{\pi x}{a}\cdot sh\frac{\pi(b-y)}{a}}{sh\frac{\pi b}{a}}+\frac{\sin\frac{2\pi x}{a}\cdot sh\frac{2\pi y}{a}}{sh\frac{2\pi b}{a}}.$$

24. $$u = x - y + const.$$

25.
$$u = \frac{\sin(3x)\cdot ch(3y)}{3\cdot sh(3\pi)} + \frac{sh(2x)\cdot\cos(2y)}{sh(2\pi)} - \frac{\sin(2x)\cdot ch(2(\pi - y))}{2sh(2\pi)}.$$

26. $$u = \frac{1}{4}\left(e^{-2y} - 1\right)\cdot\sin(2x) + e^{-4y}\cdot\sin(4x).$$

27. $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - u_0$, где

$$u_1 = \frac{\sin\frac{\pi x}{a}\cdot sh\frac{\pi(b-y)}{a}}{sh\frac{\pi b}{a}}, \qquad u_2 = \frac{\sin\frac{2\pi y}{b}\cdot sh\frac{2\pi x}{b}}{sh\frac{2\pi a}{b}},$$

$$u_3 = \frac{\sin\frac{3\pi x}{a}\cdot sh\frac{3\pi y}{a}}{sh\frac{3\pi b}{a}}, \qquad u_4 = \frac{\sin\frac{4\pi y}{b}\cdot sh\frac{4\pi(a-x)}{b}}{sh\frac{4\pi a}{b}},$$

$$u_0 = \frac{\sin\frac{5\pi x}{a}\cdot\sin\frac{6\pi y}{b}}{\frac{25\pi^2}{a^2} + \frac{36\pi^2}{b^2}}.$$

3.

$$u(Q)=\iiint\limits_{\Omega} G(P,Q)\cdot F(P)\cdot dx\,dy\,dz-\iint\limits_{S}\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_P}\cdot f(P)\cdot dS_P\,.$$

$$u(Q)=\iint\limits_{D} G(P,Q)\cdot F(P)\cdot dx\,dy-\int\limits_{\gamma}\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_P}\cdot f(P)\cdot d\gamma_P\,.$$

6.

$$G(P,Q)=G(x,y,z;x_0,y_0,z_0)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\sum_{j,k=0}^{1}\frac{(-1)^{j+k}}{\sqrt{(x-x_0)^2+\left(y-(-1)^j y_0\right)^2+\left(z-(-1)^k z_0\right)^2}}.$$

7.

$$G(P,Q)=G(x,y,z;x_0,y_0,z_0)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\sum_{i,j,k=0}^{1}\frac{(-1)^{i+j+k}}{\sqrt{\left(x-(-1)^i x_0\right)^2+\left(y-(-1)^j y_0\right)^2+\left(z-(-1)^k z_0\right)^2}}.$$

11.

$$G(P,Q)=G(x,y;x_0,y_0)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{i,j=0}^{1}(-1)^{i+j}\cdot\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\left(x-(-1)^i x_0\right)^2+\left(y-(-1)^j y_0\right)^2}}\right).$$

16. См. ответ задачи 3.

Тема 9.

Тема 9.

1. Все указанные функции, кроме w_3, осуществляют конформные отображения первого рода, т.е. в каждой точке сохраняют не только абсолютные величины углов, но и их знаки. Функция w_3 осуществляет конформное отображение второго рода, т.е. в каждой точке сохраняет абсолютные величины углов, но изменяет их знаки на противоположные. (Если $w = \varphi(z)$ задаёт конформное отображение первого рода, то $w = \overline{\varphi}(z)$ – второго. И наоборот.)

6. $v = arctg\,\dfrac{x}{y} = \dfrac{\pi}{2} - arctg\,\dfrac{y}{x}$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0,\, y > 0}} v(x, y)$ не существует.

$h(z) = \left(c + i \cdot \dfrac{\pi}{2}\right) - \ln z$, где c – произвольная действительная постоянная; $z = 0$ – точка ветвления функции $h(z)$.

7. $v = arctg\,\dfrac{x^2 - y^2}{2xy}$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0,\, x > 0 \\ y \to 0,\, y > 0}} v(x, y)$ не существует.

$h(z) = \left(c + i \cdot \dfrac{\pi}{2}\right) - 2\ln z$, где c – произвольная действительная постоянная; $z = 0$ – точка ветвления.

10. Полуполосу $\left\{z = x + iy: \ -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, \ \ y > 0\right\}$ на верхнюю полуплоскость отображает функция $w = \sin z$. Она горизонтальные отрезки переводит в дуги эллипсов с фокусами -1 и $+1$, а вертикальные отрезки – в дуги гипербол с теми же фокусами.

12. Вертикальную полосу $\left\{z = x + iy: \ -\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{4}\right\}$ на круг $\{w: \ |w| < 1\}$ отображает функция $w = tg\, z$. Она каждую вертикальную

прямую $x = c = const$, $-\frac{\pi}{4} \le c \le \frac{\pi}{4}$, переводит в " меридиан " (в дугу окружности с концами i и $-i$, проходящую через точку $w = tg\, c$), а каждый горизонтальный отрезок $\left\{ z = x + iy: \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}, \quad y = c = const, \quad -\infty < c < +\infty \right\}$ – в " параллель" (в дугу окружности, ортогональную " меридианам ", соединяющую левую часть единичной окружности с её правой частью и проходящую через точку $z = i \cdot th\, c$).

13. Горизонтальную полосу $\{z = x + iy: \quad 0 < y < \pi\}$ на верхнюю полуплоскость отображает функция $w = e^z$. Она каждую горизонтальную прямую $y = c = const$ переводит в луч $\arg w = c$, а каждый вертикальный отрезок $\{z = x + iy: \quad x = c = const, \quad \alpha \le y \le \beta\}$ – в дугу окружности $\{w: \quad |w| = e^c, \quad \alpha \le \arg w \le \beta\}$.

17. Указание. Найдите образ заданной области при отображении $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ или при отображении $w = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$.

Тема 10.

2. $u(x) = \frac{\rho \cdot g}{2E} \cdot x \cdot (l - x)$, где g – ускорение свободного падения, E – модуль продольной упругости стержня.

3. $u(x) = \frac{\rho \cdot g}{2E} \cdot x \cdot (2l - x)$ (ρ, g, E см. в задаче 2).

4. $u(x) = \frac{F}{SE} \cdot x$, где S – площадь поперечного сечения стержня, E – модуль продольной упругости .

Тема 11.

1. Уравнение теплопроводности имеет одно семейство действительных характеристик: $t = t_0 = const$.

   Уравнение Лапласа не имеет действительных характеристик.

   Волновое уравнение имеет два семейства действительных характеристик: $x + at = const$, $x - at = const$.

3. $$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

4. $$u_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}} - u_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} = \tilde{\Phi}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, u, u_{\tilde{\xi}}, u_{\tilde{\eta}}).$$

5. $$u_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}} + u_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} = \tilde{\Phi}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, u, u_{\tilde{\xi}}, u_{\tilde{\eta}}).$$

6. $$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

5. При $0 \le t_0 \le \dfrac{c}{a}$

$$u(x,t_0)=\begin{cases} 0 & , \quad x \le -at_0 - c; \\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{|x+at_0|}{2c}, & -at_0 - c \le x \le at_0 - c; \\ 1-\dfrac{|x-at_0|+|x+at_0|}{2c}, & at_0 - c \le x \le c - at_0; \\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{|x-at_0|}{2c}, & c - at_0 \le x \le c + at_0; \\ 0 & , \quad x \ge c + at_0. \end{cases}$$

При $t_0 \ge \dfrac{c}{a}$

$$u(x,t_0)=\begin{cases} 0 & , \quad x \le -at_0 - c; \\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{|x+at_0|}{2c}, & -at_0 - c \le x \le c - at_0; \\ 0 & , \quad c - at_0 \le x \le at_0 - c; \\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{|x-at_0|}{2c}, & at_0 - c \le x \le c + at_0; \\ 0 & , \quad x \ge c + at_0. \end{cases}$$

$$u\left(\frac{c}{2},t\right)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\le t\le\frac{c}{2a};\\ \frac{1}{2}+\frac{c-2at}{4c}, & \frac{c}{2a}\le t\le\frac{3c}{2a};\\ 0, & t\ge\frac{3c}{2a}.\end{cases}$$

6. При $0\le t_0\le\frac{c}{a}$

$$u(x,t_0)=\begin{cases}0, & x\le -at_0-c;\\ \frac{V}{2a}(c+x+at_0), & -at_0-c\le x\le at_0-c;\\ Vt_0, & at_0-c\le x\le c-at_0;\\ \frac{V}{2a}(c-x+at_0), & c-at_0\le x\le c+at_0;\\ 0, & x\ge c+at_0.\end{cases}$$

При $t_0\ge\frac{c}{a}$

$$u(x,t_0)=\begin{cases} 0, & x \le -at_0-c; \\ \dfrac{V}{2a}(c+x+at_0), & -at_0-c \le x \le c-at_0; \\ \dfrac{Vc}{a}, & c-at_0 \le x \le at_0-c; \\ \dfrac{V}{2a}(c-x+at_0), & at_0-c \le x \le c+at_0; \\ 0, & x \ge c+at_0. \end{cases}$$

$$u\left(\frac{c}{2},t\right)=\begin{cases} Vt, & 0 \le t \le \dfrac{c}{2a}; \\ \dfrac{V}{2a}\left(\dfrac{c}{2}+at\right), & \dfrac{c}{2a} \le t \le \dfrac{3c}{2a}; \\ \dfrac{Vc}{a}, & t \ge \dfrac{3c}{2a}. \end{cases}$$

7. При $x_0 \le -\dfrac{\pi}{2}$

$$u(x_0,t)=\begin{cases} 0, & 0 \le t \le -\dfrac{\pi}{2}-x_0; \\ \dfrac{1}{2}(\sin(x_0+t)+1), & -\dfrac{\pi}{2}-x_0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}-x_0; \\ 1, & t \ge \dfrac{\pi}{2}-x_0. \end{cases}$$

При $-\dfrac{\pi}{2} \le x_0 \le 0$

$$u(x_0,t)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\sin(x_0+t)-\sin(x_0-t)\right), & 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}+x_0\,; \\ \dfrac{1}{2}\left(\sin(x_0+t)+1\right), & \dfrac{\pi}{2}+x_0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}-x_0\,; \\ 1, & t \ge \dfrac{\pi}{2}-x_0\,. \end{cases}$$

При $0 \le x_0 \le \dfrac{\pi}{2}$

$$u(x_0,t)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\sin(x_0+t)-\sin(x_0-t)\right), & 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}-x_0\,; \\ \dfrac{1}{2}\left(1-\sin(x_0-t)\right), & \dfrac{\pi}{2}-x_0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}+x_0\,; \\ 1, & t \ge \dfrac{\pi}{2}+x_0\,. \end{cases}$$

При $x_0 \ge \dfrac{\pi}{2}$

$$u(x_0,t)=\begin{cases} 0, & 0 \le t \le x_0-\dfrac{\pi}{2}\,; \\ \dfrac{1}{2}\left(1-\sin(x_0-t)\right), & x_0-\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2}+x_0\,; \\ 1, & t \ge \dfrac{\pi}{2}+x_0\,. \end{cases}$$

13. При $0 \le t_0 \le \pi$

$$u(x,t_0)=\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\sin(x+t_0)+\sin(x-t_0)\right), & 0 \le x \le \pi - t_0\ ; \\ \frac{1}{2}\sin(x-t_0), & \pi - t_0 \le x \le t_0 + \pi\ ; \\ 0, & x \ge t_0 + \pi\ . \end{cases}$$

При $t_0 \ge \pi$

$$u(x,t_0)=\begin{cases} 0, & 0 \le x \le t_0 - \pi\ ; \\ \frac{1}{2}\sin(x-t_0), & t_0 - \pi \le x \le t_0 + \pi\ ; \\ 0, & x \ge t_0 + \pi\ . \end{cases}$$

При $0 \le x_0 \le \pi$

$$u(x_0,t)=\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\sin(x_0+t)+\sin(x_0-t)\right), & 0 \le t \le \pi - x_0\ ; \\ \frac{1}{2}\sin(x_0-t), & \pi - x_0 \le t \le x_0 + \pi\ ; \\ 0, & t \ge x_0 + \pi\ . \end{cases}$$

При $x_0 \ge \pi$

$$u(x_0,t)=\begin{cases} 0, & 0 \le t \le x_0 - \pi\ ; \\ \frac{1}{2}\sin(x_0-t), & x_0 - \pi \le t \le x_0 + \pi\ ; \\ 0, & t \ge x_0 + \pi\ . \end{cases}$$

14. $$u(x,t)=\begin{cases}\sin(k(x-bt)), & x\ge bt\,;\\ 0 & ,\ 0\le x\le bt\,.\end{cases}$$

$$u(x_0,t)=\begin{cases}-\sin(kbt), & 0<t\le\dfrac{2\pi}{kb}\,;\\ 0 & ,\ t\ge\dfrac{2\pi}{kb}\,.\end{cases}$$

$$u(x,t_0)=\begin{cases}0 & ,\ 0\le x\le\dfrac{3\pi}{k}\,;\\ -\sin(kx) & ,\ x\ge\dfrac{3\pi}{k}\,.\end{cases}$$

15. $$u(x_0,t)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(bt), & 0<t\le\dfrac{\pi}{4b}\,;\\ \dfrac{1}{2}\cos\left(bt-\dfrac{\pi}{4}\right), & \dfrac{\pi}{4b}\le t\le\dfrac{3\pi}{4b}\,;\\ 0 & ,\ t\ge\dfrac{3\pi}{4b}\,.\end{cases}$$

$$u(x,t_0)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x, & 0\le x\le\dfrac{\pi}{4}\,;\\ \dfrac{1}{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right), & \dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{3\pi}{4}\,;\\ 0 & ,\ x\ge\dfrac{3\pi}{4}\,.\end{cases}$$

16. $$u(x,t)=\begin{cases}\mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & 0\le x\le at\,;\\ 0 \quad , & x\ge at\,.\end{cases}$$

17. $$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{a}{k}\displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{a}}F(\tau)d\tau\,, & 0\le x\le at\,;\\ 0 \quad , & x\ge at\,.\end{cases}$$

18. $$u(x,t)=\sin\frac{\pi x}{l}\cdot\cos\frac{\pi at}{l}\,.$$

Тема 13.

1. $$u=\cos\frac{\pi at}{l}\cdot\sin\frac{\pi x}{l}\,.$$

2.
$$u=\cos\frac{3bt}{2}\cdot\sin\frac{3x}{2}+\cos\frac{5bt}{2}\cdot\sin\frac{5x}{2}+\frac{2}{7}\cdot\sin\frac{7bt}{2}\cdot\sin\frac{7x}{2}\,.$$

3.
$$u=\cos\frac{3at}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{7at}{2}\cdot\cos\frac{7x}{2}+\frac{2}{5}\sin\frac{5at}{2}\cdot\cos\frac{5x}{2}\,.$$

4.
$$u=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\cos(\pi(2n+1)t)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)x\right).$$

6.

$$u=\frac{4f_0\cdot l^2}{\pi^3\cdot a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cdot\left(1-\cos\frac{\pi(2n+1)at}{l}\right)\cdot\sin\frac{\pi(2n+1)x}{l}.$$

7.

$$u=\frac{2}{\pi}\cdot t\cdot\sin t\cdot\sin x+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}\cdot(\cos t-\cos(2n+1)t)\cdot\sin(2n+1)x.$$

8. $u=\pi x+t+2\cos 10t\cdot\sin 5x.$

9. $u=4x+t^2+\cos 2t\cdot\sin x.$

10. $u=4x+t^2+\frac{1}{3}\cdot\sin 6t\cdot\sin 3x.$

11. $u=\frac{1}{2}(\sin t-t\cdot\cos t)\cdot\cos 2x.$

12.

$$u=\frac{8\cdot e^{-t}}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\left(\pi(-1)^n-\frac{2}{2n+1}\right)\sin\frac{2n+1}{2}t\cos\frac{2n+1}{2}x$$

13. $$u=\frac{2}{\pi a}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{l}x_0}{n}\cdot\sin\frac{\pi na}{l}t\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

14.

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda_n+1)\cdot\left(\sin\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}\right)}{(\lambda_n-1)\sqrt{\lambda_n}(\lambda_n+2)}\Big[(\lambda_n-2)\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)+$$

$$+\sqrt{\lambda_n}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)+\cos t-\sin t\Big]\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)+(\cos t-\sin t)\frac{x}{2}+\sin t$$

где λ_n – положительные корни уравнения $tg\sqrt{\lambda}=-\sqrt{\lambda}$.

15.

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\lambda_n+1)\cdot\left(\cos\sqrt{\lambda_n}-1\right)}{(\lambda_n-1)\cdot\lambda_n\cdot(\lambda_n+2)}\cdot\left[\cos t-\cos\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)\right]\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)+$$

$+x\cdot\cos t+\sin t-\cos t$, где λ_n – корни уравнения $tg\sqrt{\lambda}=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

16.

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_n\cdot\frac{\lambda_n}{\lambda_n^2-4}\left(\cos\sqrt{\lambda_n}t-e^{-t}\cdot\cos t\right)-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\chi_n\,\frac{1}{\lambda_n^2-4}\left(\frac{\lambda_n-2}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\sqrt{\lambda_n}t-2e^{-t}\sin t\right)+(2-x)e^{-t}\sin t,$$

где χ_n – коэффициенты Фурье функции $(2-x)$ по системе собственных функций $X_n=\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{2}\cos\sqrt{\lambda_n}x-\sin\sqrt{\lambda_n}x$, а λ_n – корни уравнения

$$tg\sqrt{\lambda}=\frac{\sqrt{\lambda}}{2}.$$

Тема 14.

1. Изображение решения исходной задачи $\widehat{u}(\lambda,t)$ (t – параметр) удовлетворяет условиям

$$\frac{d\widehat{u}}{dt}+a^2\lambda^2\widehat{u}=0, \qquad \widehat{u}(\lambda,0)=\widehat{\varphi}(\lambda) \quad .$$

Решение этой задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка имеет вид $\widehat{u}(\lambda,t)=\widehat{\varphi}(\lambda)\cdot e^{-a^2\lambda^2 t}$. Применяя обратное преобразование Фурье, получаем

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda x}\cdot\widehat{u}(\lambda,t)d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)d\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cdot e^{i\lambda(x-\xi)}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)d\xi\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cdot\cos[\lambda(x-\xi)]d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}\cdot\varphi(\xi)d\xi .$$

В последнем равенстве мы учли, что

$$\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\alpha^2\lambda^2}\cdot\cos(\lambda\beta)d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\exp\left\{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right\}.$$

2. $$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp\left\{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}}{\sqrt{t-\tau}}f(\xi,\tau)d\xi .$$

3. Изображение решения $\widehat{u}_S(\lambda,t)$ удовлетворяет задаче

$$\frac{d\widehat{u}_S}{dt}+a^2\lambda^2\widehat{u}_S=0, \qquad \widehat{u}_S(\lambda,0)=\widehat{\varphi}_S(\lambda).$$

Отсюда $\widehat{u}_S(\lambda,t)=\widehat{\varphi}_S(\lambda)\cdot e^{-a^2\lambda^2 t}$. Применяя обратное синус-преобразование Фурье, найдём $u(x,t)$ (см. задачу 18 темы 5).

4. См. ответ к задаче 18 темы 5.

5. Изображение решения $\widehat{u}_S(\lambda,t)$ удовлетворяет задаче

$$\frac{d\widehat{u}_S}{dt}+a^2\lambda^2\widehat{u}_S=a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\lambda\mu(t),\qquad \widehat{u}_S(\lambda,0)=0.$$

Отсюда $\widehat{u}_S(\lambda,t)=a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\lambda\int\limits_0^t e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\cdot\mu(\tau)d\tau$. Применяя обратное синус-преобразование Фурье, найдём

$$u(x,t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\cdot\mu(\tau)d\tau.$$

6. Изображение решения $\widehat{u}_C(\lambda,t)$ удовлетворяет задаче

$$\frac{d\widehat{u}_C}{dt}+a^2\lambda^2\widehat{u}_C=-a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\nu(t),\qquad \widehat{u}_C(\lambda,0)=0.$$

Отсюда $\widehat{u}_C(\lambda,t)=-a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int\limits_0^t e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\cdot\nu(\tau)d\tau$. Применяя обратное косинус-преобразование Фурье, найдём $u(x,t)$ (см. задачу 25 темы 5).

9. Изображение решения $\widehat{u}(\lambda,t)$ удовлетворяет уравнению $\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2}+a^2\lambda^2\widehat{u}=0$. Его общее решение имеет вид $\widehat{u}(\lambda,t)=f_1(\lambda)\cdot e^{i\lambda at}+f_2(\lambda)\cdot e^{-i\lambda at}$, где f_1 и f_2 – произвольные функции от λ. Применяя обратное преобразование Фурье, найдём

$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$. Из начальных условий исходной задачи окончательно получим $u(x,t)$ (см. задачу 1 темы 12).

10. Изображение решения $\widehat{u}(\lambda,t)$ удовлетворяет задаче $\dfrac{d^2\widehat{u}}{dt^2} + a^2\lambda^2\widehat{u} = \widehat{f}(\lambda,t)$, $\widehat{u}(\lambda,0) = 0$, $\dfrac{d\widehat{u}(\lambda,0)}{dt} = 0$. Отсюда $\widehat{u}(\lambda,t) = \dfrac{1}{a\lambda}\int\limits_0^t \sin[a\lambda(t-\tau)]\cdot\widehat{f}(\lambda,\tau)d\tau$. Применяя обратное преобразование Фурье, найдём $u(x,t)$ (см. задачу 20 темы 12).

13. Изображение решения исходной задачи $U(x,p)$ (x – параметр) удовлетворяет условиям $\dfrac{d^2U}{dx^2} = \dfrac{p}{a^2}U$, $U(0,p) = M(p)$, где M – изображение функции $\mu(t)$. Из требования ограниченности функции $u(x,t)$ при $x \to +\infty$ вытекает ограниченность её изображения $U(x,p)$ при $x \to +\infty$. Отсюда $U(x,p) = M(p)\cdot\left[p\cdot\dfrac{1}{p}\cdot\exp\left\{-\dfrac{\sqrt{p}}{a}x\right\}\right]$. Оригинал функции $\dfrac{1}{p}\cdot e^{-\alpha\sqrt{p}}$ равен $1-\Phi\left(\dfrac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)$ (находим его по таблице), а выражение в квадратных скобках является изображением его производной по t. Для восстановления функции $u(x,t)$ остаётся применить теорему о произведении изображений.

15. $$U(x,p) = \frac{A a\omega}{p(p^2+\omega^2)}\cdot\frac{sh\left(\frac{x}{a}p\right)}{ch\left(\frac{l}{a}p\right)}.$$

Учебное издание

ЗАХАРОВ Евгений Владимирович
ДМИТРИЕВА Ирина Владимировна
ОРЛИК Сергей Игоревич

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Методическое пособие

Издательский отдел
Факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ им. М.В. Ломоносова
Лицензия ИД N 05899 от 24.09.01 г.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус

Напечатано с готового оригинал-макета
в издательстве ООО "МАКС Пресс"
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.
Подписано к печати 28.09.2005 г.
Формат 60х90 1/16. Усл.печ.л. 10,0. Тираж 500 экз. Заказ 575.
Тел. 939-3890, 939-3891. Тел./Факс 939-3891.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус, 627 к.